XVI. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2018. december 1.

7. évfolyam

1. **Misi megszorzott egymással hét különböző egész számot, és** 2156**-ot kapott eredményül. Melyik hét számot szorozta meg? Van-e ennek a feladatnak több megoldása is?**

2. Karolina leírta egymás alá az első 2018 **temészetes számot, és összeadta őket.**
a) Milyen számjegy áll a 10**-esek helyén?**
b) Mi lesz az összeadás eredménye?

3. Legyen az ABC **egy tetszőleges hegyesszögű háromszög. Legyen a** D **pont az** A **csúcsból a** BC **oldalra bocsátott magasságvonal talppontja, az** E **pedig a** B **pontból az** AC **oldalra bocsátott magasságvonal talppontja. Bizonyítsd be, hogy a** BD **és az** AE **szakaszok felezőmerőlegeseinek metszéspontja rajta van az** AB **oldalon!**

4. Egy egyenlőoldalú háromszög oldalai $30\,cm$ **hosszúak. Beleszórunk ebbe a háromszögbe** 10 **búzaszemet. Lehetséges-e úgy elhelyezni ezeket a búzaszemeket, hogy bármely két búzaszem között legalább** $10\,cm$ **legyen távolság? A választ részletesen indokold meg!**

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XVI. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
MEGOLDÁSOK – 7. évfolyam

1. **Misi megszorzott egymással hét különböző egész számot, és** 2156**-ot kapott eredményül. Melyik hét számot szorozta meg? Van-e ennek a feladatnak több megoldása is?**

Megoldás: A 2156 prímtényezős formája: $2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 11$ mindössze 5 számból áll amelyek között vannak egyenlőek. 7 különbőző számot úgy kaphatunk, ha a 2 párjaként a -2-t, a 7 párjaként a -7-et választjuk. Így már lesz 5 különböző szozónk. Hogy meglegyen a 7 különböző szám, hozzávesszük ezekhez az 1 és -1 számokat. Ha az eddigi szorzatot ezekkel megszorozzuk, csak az előjele változik negtívra. Hogy az eredmény pozitívvá váljon, a 11 előjele is neagtív kell, hogy legyen. Tehát:

$$2156 = 1 \cdot (-1) \cdot 2 \cdot (-2) \cdot 7 \cdot (-7) \cdot \left(-11\right).$$

A feladatnak nincs több megoldása.

2. Karolina leírta egymás alá az első 2018 **temészetes számot, és összeadta őket.**
a) milyen számjegy áll a 10**-esek helyén?**
b) mi lesz az összeadás eredménye?

I. megoldás: A feladat valójában az 1+2+3+4+5+ .... + 2016+2017+2018 összeg kiszámítása. Vegyük észre, hogy 1+2018=2019, 2+2017=2019, 3+2016=2019. Tehát, ha összeadjuk az első tagot az utolsóval, 2019-et kapunk. Ha ezeket letöröljük, akkor az újabb elsőt az újabb utolsóval öszeadva szintén 2019-et kapunk, és így tovább. Összesen $\frac{2018}{2} = 1009$ párosunk van. Az összeg tehát $1009 \cdot 2019 = 2037171$, ami azt jelenti, hogy a tizesek helyén a 7 áll.

II. megoldás: Az egymás alá írt számokat úgy adjuk össze, hogy először összeadjuk az utolsó számjegyeket tartalmazó oszlopot. Ebben az oszlopban az

$$\left(1+2+3+4+5+6+7+8+9+0\right)+\cdots+\left(1+2+3+4+5+6+7+8+9+0\right)+$$
$$+\left(1+2+3+4+5+6+7+8\right)$$

összeg áll. Mivel $1+2+3+4+5+6+7+8+9+0=45$, és ez az összeg 201-szer ismétlődik, így $201 \cdot 45 = 9045$. Hozzájön még az utolsó,

$$1+2+3+4+5+6+7+8=36.$$

Az utolsó számjegyek összege tehát $9045+36=9081$. Ebből leírjuk az egyesek helyére az 1-et, majd átviszünk 908-at. Az utolsó előtti oszlopban ugyzanezek a számjegyek fordulnak elő azzal, hogy minden 100-asban (pl 200 és 299 között) 10 db 0-ás, 10 db 1-es, 10 db 2-es, ... 10 db 9-es számjegy van. Ezek összege $10 \cdot 45 = 450$. Mivel 2018-ig 20 db teljes százas van (1-től 1999-ig), ez $20 \cdot 450 = 9000$. 2000 és 2018 között a 10-esek helyén $10 \cdot 0 + 8 \cdot 1 = 8$ összeget kapunk. Így összesen:

$$908 \text{ (átvitel)} + 9000 + 9 = 9917,$$

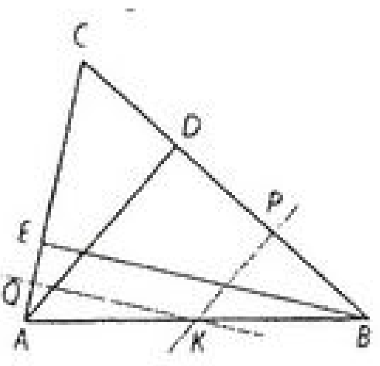
amiből leírjuk a százasok helyére a 7-et, majd átvisszük a 991-et. A százasok helyén 199 db 0 áll, majd 200 db 1-es, 200 db 2-es, és így tovább, végül 200 db 9-es. 2000 és 2018 között ezen a helyen csak 0-ák állnak, így ezek összege nem hat ki az eredményre. A százasok helyére tehát $991 \text{ (átvitel)} + 20 \cdot 45 = 9991$ kerülne, amiből leírjuk az 1-est a százasok helyére, és átviszünk 999-et. Az ezresek helyén előbb 999 db 0 van, majd 1000 db 1-es, végül 19 db 2-es. Így

$$999 \text{ (átvitel)} + 999 \cdot 0 + 1000 \cdot 1 + 19 \cdot 2 = 2037,$$

ezt mind leírjuk az eddig leírt számjegyek elé, s az eredmény 2037171 lesz. A tizesek helyén a 7-es számjegy áll.

3. Legyen az ABC egy tetszőleges hegyesszögű háromszög. Legyen a D pont az A csúcsból a BC oldalra bocsátott magasságvonal talppontja, az E pedig a B pontból az AC oldalra bocsátott magasságvonal talppontja. Bizonyítsd be, hogy a BD és az AE szakaszok felezőmerőlegeseinek metszéspontja rajta van az AB oldalon!

Megoldás: A feladat vázlata az ábrán található (helyes ábra 5 pont). Legyen DB felezőpontja P, AE felezőpontja pedig Q. Mivel a DB szakasz felezőmerőlegese merőleges a DB szakaszra, és az AD magasságvonal is merőleges a BC oldalra (ami magán hordozza a DB szakaszt), ezért a felezőmerőleges párhuzamos a magasságvonallal. Nevezzük K-nak azt a pontot az AB szakaszon, ahol a DB szakasz felezőmerőlegese metszi azt. Két dolgot tudunk: PK párhuzamos AD-vel, és PK áthalad az DB oldala felezőpontján. Ez elegendő ahhoz, hogy PK középvonal legyen az ABD háromszögben. Ebből pedig az következik, hogy a K pont az AB oldal felezőpontja.



Analóg módon: Tegyük fel, hogy az AB oldalon van egy K_1 pont, ahol az AE felezőmerőlegese áthalad. A QK_1 szakasz középvonal az ABE háromszögben, hisz áthalad az AE oldal felezőpontján és párhuzamos a BE oldallal. A középvonal az AB oldalt a felezőpontjában metszi, tehát K_1 is az AB oldal felezőpontja. Az AB oldalnak csak egy középpontja van így kimondhatjuk, hogy K és K_1 egybeesnek.

4. Egy egyenlőoldalú háromszög oldalai $30\,cm$ hosszúak. Beleszórunk ebbe a háromszögbe 10 búzaszemet. Lehetséges-e úgy elhelyezni ezeket a búzaszemeket, hogy bármely két búzaszem között legalább $10\,cm$ legyen távolság? A választ részletesen indokold meg!

Megoldás: A háromszög minden oldalát 3 részre osztjuk. Összekötjük a megfelelő osztópontokat (az oldalakkal párhuzamos szakaszokat kapunk), s kialakul 9 db egyenlőoldalú háromszög amelyeknek az oldala 10 cm hosszú. Mivel 10 db búzaszemet kell elosztani bennük, a skatulya elv alapján lesz egy olyan kis háromszög, amibe 2 búzaszem kerül. Mivel a kis háromszögek oldala $10\,cm$ hosszú, ez a két búzaszem kevesebb mint $10\,cm$ távolságra lesz egymástól. Ennek alapján megállapíthatjuk, hogy nem lehet a háromszögbe elhelyezni úgy 10 búzaszemet, hogy bármely kettő között legyen legalább $10\,cm$ távolság.