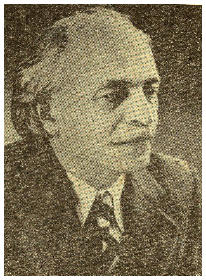


XIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2015. december 5.

11. évfolyam

1. Az ABC hegyesszögű háromszögben legyen D pont a C csúcsból húzott magasság talppontja úgy, hogy $AD=BC$ érvényes. Ha L pont a D pontból húzott merőleges talppontja az A csúcsból szerkesztett magasságra, akkor igazold, hogy a BL az $ABC\angle$ szögfelezője!

2. Oldd meg az egyenletrendszert!

$$\log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2,$$
$$\log_3 y + \log_9 z + \log_9 x = 2,$$
$$\log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y = 2.$$

3. Határozd meg mindazon x és y valós számokat, amelyekre

$$x^2 - 2x\cos(xy) + 1 = 0.$$

4. Melyik n természetes szám esetén van a $\left(2+x^2\right)^n + \left(2+\frac{1}{x^2}\right)^n = 18$ egyenletnek legtöbb különböző valós gyöke?

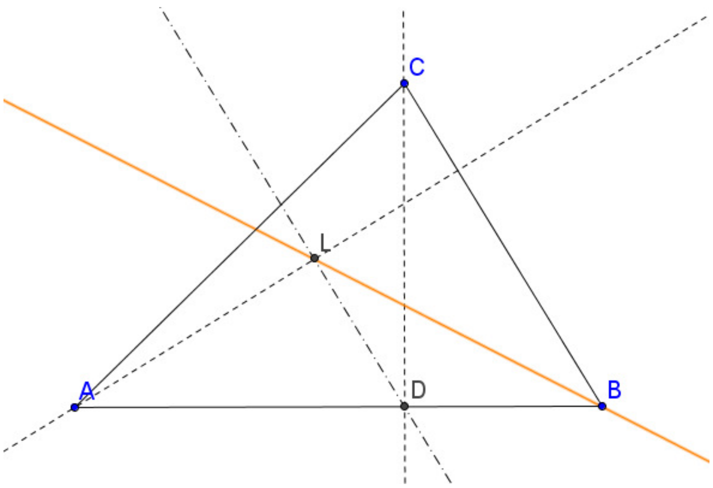
A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

MEGOLDÁSOK – <u>11. évfolyam</u>

1. Az ABC hegyesszögű háromszögben legyen D pont a C csúcsból húzott magasság talppontja úgy, hogy $AD = BC$ érvényes. Ha L pont a D pontból húzott merőleges talppontja az A csúcsból szerkesztett magasságra, akkor igazold, hogy a BL az $ABC\angle$ szögfelezője!

Megoldás: Mivel $DAL\angle = 90° - ABC\angle = BCD\angle$ és $AD = CB$, a két derékszögű háromszög, ALD és BCD a SZÖG-OLDAL-SZÖG egybevágósági tétel alapján egybevágó, és ezért befogóik is egybevágóak, azaz $LD = BD$. Tehát LDB háromszög egyenlő szárú, s így $DLB\angle = DBL\angle$.



Ezek alapján $180° = LAB\angle + ABL\angle + BLA\angle = 90° - ABC\angle + ABL\angle + 90° + ABL\angle$, amiből következik, hogy $2 \cdot ABL\angle = ABC\angle$, amit bizonyítani kellett. **(25 pont)**

2. Oldd meg az egyenletrendszert!

$$\log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2,$$
$$\log_3 y + \log_9 z + \log_9 x = 2,$$
$$\log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y = 2.$$

Megoldás: Az egyenletrendszer értelmezési tartománya miatt $x > 0, y > 0, z > 0$, ezért átalakítható a következő alakba: **(5 pont)**

$$\log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 y + \frac{1}{2}\log_2 z = \log_2 4,$$
$$\log_3 y + \frac{1}{2}\log_3 z + \frac{1}{2}\log_3 x = \log_3 9,$$
$$\log_4 z + \frac{1}{2}\log_4 x + \frac{1}{2}\log_4 y = \log_4 16,$$

Illetve **(5 pont)**

$$x\sqrt{yz} = 4, \quad y\sqrt{zx} = 9, \quad z\sqrt{xy} = 16.$$

Összeszorozva a fenti egyenleteket adódik **(5 pont)**

$$(xyz)^2 = 576 = 24^2 \text{ , vagyis } xyz = 24.$$ **(5 pont)**

Visszahelyettesítve a kapott értéket az első egyenletbe, kapjuk a megoldásokat:

$$x = \frac{2}{3}, \quad y = \frac{27}{8}, \quad z = \frac{32}{3}.$$ **(5 pont)**

3. Határozd meg mindazon x és y valós számokat, amelyekre

$$x^2 - 2x\cos(xy) + 1 = 0.$$

Megoldás: Az adott egyenlet átalakítás után:

$$x^2 - 2x\cos(xy) + \cos^2(xy) + \sin^2(xy) = 0, \text{ azaz } (x - \cos(xy))^2 + \sin^2(xy) = 0$$

alakban írható fel, s ez a rendszer ekvivalens az $x - \cos(xy) = 0$ és $\sin(xy) = 0$ egyenletrendszerrel. **(5 pont)**

Ha $\sin(xy) = 0$, akkor $\cos(xy) = \pm 1$, ahonnan $x = 1$ vagy $x = -1$. **(5 pont)**

Ha $x = 1$, akkor $\cos y = 1$, ahonnan $y = 2k\pi$. **(5 pont)**

Ha $x = -1$, akkor $\cos(-y) = -1$, ahonnan $y = (2m+1)\pi$. **(5 pont)**

Az egyenlet megoldáshalmaza: $M = \{(1, 2k\pi), k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(-1, (2m+1)\pi), m \in \mathbb{Z}\}$.

(5 pont)

4. Melyik n természetes szám esetén van a $\left(2+x^2\right)^n + \left(2+\frac{1}{x^2}\right)^n = 18$ egyenletnek legtöbb különböző valós gyöke?

Megoldás: Felhasználva a számtani (aritmetikai) és a mértani (geometriai) közép közti egyenlőtlenséget, valamint, hogy $(\forall a)(a \in \mathbb{R}^* \Rightarrow a^2 + \frac{1}{a^2} \geq 2)$, felírhatjuk, hogy

$$18 = \left(2+x^2\right)^n + \left(2+\frac{1}{x^2}\right)^n \geq 2 \cdot \sqrt{\left(2+x^2\right)^n \cdot \left(2+\frac{1}{x^2}\right)^n} = 2 \cdot \sqrt{\left(4 + 2 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 1\right)^n} \geq$$

$$\geq 2 \cdot \sqrt{(4 + 2 \cdot 2 + 1)^n} = 2 \cdot 3^n.$$

Ebből következik, hogy $18 \geq 2 \cdot 3^n$ és adódik, hogy $n \in \{0, 1, 2\}$. **(5 pont)**

Ha $n = 0$, akkor $\left(2+x^2\right)^0 + \left(2+\frac{1}{x^2}\right)^0 = 18$ esetén nincs valós megoldás. **(5 pont)**

Ha $n = 1$, akkor $\left(2+x^2\right)^1 + \left(2+\frac{1}{x^2}\right)^1 = 18$, s a valós megoldások az $x^4 - 14x^2 + 1 = 0$ egyenlet megoldásai, vagyis $x^2 = 7 \pm 4\sqrt{3} = 4 \pm 2 \cdot 2\sqrt{3} + 3 = \left(\pm 2 \pm \sqrt{3}\right)^2$, amiből következik, hogy a megoldások halmaza $M = \left\{2+\sqrt{3},\ 2-\sqrt{3},\ -2+\sqrt{3},\ -2-\sqrt{3}\right\}$.

(5 pont)

Ha $n = 2$, akkor $\left(2+x^2\right)^2 + \left(2+\frac{1}{x^2}\right)^2 = 18$ alakú az egyenlet, s a valós megoldások az $x^4 + 4x^2 - 10 + \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^2} = 0$ szimmetrikus egyenlet megoldásai. Tehát $x^2 + \frac{1}{x^2} = a$ helyettesítéssel kapjuk az $\left(a^2 - 2\right) + 4a - 10 = 0$ egyenletet, amelynek a megoldásai $a_1 = 2$, $a_2 = -6$, innen, első esetben $x^2 + \frac{1}{x^2} = 2$, ahonnan $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$, amelynek megoldásai $x = 1$ és $x = -1$, a második esetben pedig $x^2 + \frac{1}{x^2} = -6$, illetve $x^4 + 6x^2 + 1 = 0$, amely nem ad valós megoldást. A keresett érték $n = 1$. **(10 pont)**