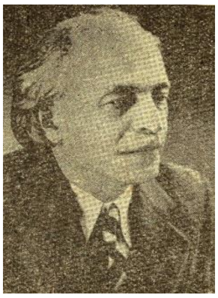

**XVII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY**
**Zenta, 2019. december 8.**

## 6. évfolyam

**1. A** $3\cdot3\cdot3\cdot\ldots\cdot3\cdot3$ **szorzatban** $2019$ **darab** $3$**-ast szorzunk meg önmagával. Mi az így kapott szorzat utolsó számjegye?**

**2. Bizonyítsd be, hogy az** $\left(a-b\right)ab=2019$ **egyenletnek nincs megoldása az egész számok halmazában.**

**3. Kétféle téglalapunk van. Az egyik területe** $24\,cm^2$**, a másiké pedig** $60\,cm^2$**. Hányféleképpen lehet ezekből összeilleszteni olyan téglalapot, amelynek területe** $84\,cm^2$ **lesz? Mekkorák lesznek az összeillesztéssel kapott téglalapok oldalai? (A téglalapok oldalainak mérőszámai természetes számok, a mértékegység pedig** $cm$**.)**

**4. Adottak az** $E, F, G$ **és** $H$ **pontok, rendre, az** $ABCD$ **négyzet** $AB, BC, CD$ **és** $DA$ **oldalain úgy, hogy** $AE=AH=CF=DG$**. Bizonyítsd be, hogy ekkor teljesül az** $EHF\angle=CFG\angle$ **egyenlőség!**

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

***Jó munkát!***

# XVII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI – 6. évfolyam

**1. A** $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 3$ **szorzatban** 2019 **darab** 3**-ast szorzunk meg önmagával. Mi az így kapott szorzat utolsó számjegye?**

**Megoldás:** 3 többszörösei: 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561, és így tovább. Az utolsó számjegyek négyes ciklusban ismétlődnek. 2019 néggyel való osztásakor a maradék három, tehát a keresett szorzat és a ciklus harmadik tagjának utolsó számjegyei megegyeznek, azaz a szorzat utolsó számjegye a 7.

**2. Bizonyítsd be, hogy az** $(a-b)ab = 2019$ **egyenletnek nincs megoldása az egész számok halmazában.**

**Megoldás:** Ha $a$ és $b$ is páratlan, akkor különbségük páros, és ekkor az egyenlet bal oldalán levő szorzat páros. Ha $a$ és $b$ is páros, akkor különbségük páros, és ekkor az egyenlet bal oldalán levő szorzat páros. Ha $a$ és $b$ közül az egyik páros, a másik páratlan, akkor különbségük páratlan, és ekkor az egyenlet bal oldalán levő szorzat páros. Tehát az egyenlet bal oldala minden esetben páros, ezért nem lehet egyenlő 2019-cel.

**3. Kétféle téglalapunk van. Az egyik területe** $24\,cm^2$**, a másiké pedig** $60\,cm^2$**. Hányféleképpen lehet ezekből összeilleszteni olyan téglalapot, amelynek területe** $84\,cm^2$ **lesz? Mekkorák lesznek az összeillesztéssel kapott téglalapok oldalai? (A téglalapok oldalainak mérőszámai természetes számok, a mértékegység pedig** $cm$**.)**

**Megoldás:** A $24\,cm^2$ területű téglalap területét jelölje $T_1$, míg a $60\,cm^2$ területű téglalap területét $T_2$.

$$T_1 = 24\left(cm^2\right) = 1 \cdot 24 = 2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$$

$$T_2 = 60\left(cm^2\right) = 1 \cdot 60 = 2 \cdot 30 = 3 \cdot 20 = 4 \cdot 15 = 5 \cdot 12 = 6 \cdot 10$$

$$T_1 + T_2 = 84\left(cm^2\right)$$

$$84 = 1 \cdot 24 + 1 \cdot 60 = 1 \cdot (24 + 60) = 1 \cdot 84$$

$$84 = 2 \cdot 12 + 2 \cdot 30 = 2 \cdot (12 + 30) = 2 \cdot 42$$

$$84 = 3 \cdot 8 + 3 \cdot 20 = 3 \cdot (8 + 20) = 3 \cdot 28$$

$$84 = 4 \cdot 6 + 4 \cdot 15 = 4 \cdot (6 + 15) = 4 \cdot 21$$

$$84 = 6 \cdot 4 + 6 \cdot 10 = 6 \cdot (4 + 10) = 6 \cdot 14$$

$$84 = 12 \cdot 2 + 12 \cdot 5 = 12 \cdot (2 + 5) = 12 \cdot 7$$

Tehát hat féleképpen lehet összeillesztéssel előállítani a $84\,cm^2$ területű téglalapot. Az így előállított téglalapok oldalainak hosszúságai:

| **a** ($cm$) | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **b** ($cm$) | 84 | 42 | 28 | 21 | 14 | 7 |

**4. Adottak az** *E, F, G* **és** *H* **pontok, rendre, az** *ABCD* **négyzet** *AB, BC, CD* **és** *DA* **oldalain úgy, hogy** $AE = AH = CF = DG$**. Bizonyítsd be, hogy ekkor teljesül az** $EHF\angle = CFG\angle$ **egyenlőség!**

**Megoldás:** Mivel az *AEH* háromszög derékszögű és egyenlő szárú, ezért $AHE\angle = 45°$. Jelöljük a $CFG\angle$-et $\alpha$-val. *CFG* háromszög, és GDH háromszög egybevágó az *OSZO* tétel alapján, mivel $CF = DG$, $CG = DH$ és derékszögűek. Ez alapján $CGF\angle = 90° - \alpha$ és $GF = GH$. A $HGF\angle$ kifejezhető, mint $180° - (\alpha + 90° - \alpha)$, tehát derékszög. Az *FGH* háromszög derékszögű és egyenlő szárú, ezért $GHF\angle = 45°$. Az $FHE\angle$ kifejezhető, mint $180° - (90° - \alpha + 45° + 45°)$, tehát $EHF\angle = \alpha$, azaz $EHF\angle = CFG\angle$.