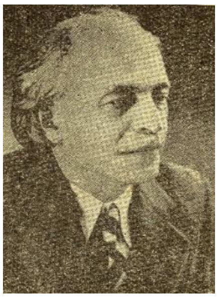


XIX. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2021. december 4.

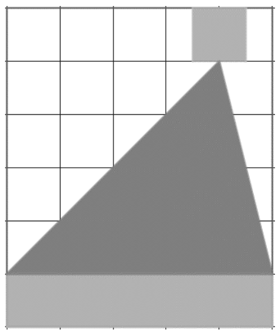
<u>6. évfolyam</u>

1. Mihály a lehető legnagyobb kerületű csokoládéháromszöggel szeretné meglepni testvérét idén karácsonykor. A háromszögről tudjuk, hogy az egyenlő szárú, valamint azt, hogy oldalai rendre $12x-5$, $6x+19$ és $3x+67$ mm hosszúságúak. Határozd meg a háromszög oldalainak hosszát, úgy hogy a háromszög kerülete maximális legyen!

2. Mikulás bácsi olyan régen használta már telefonját, hogy elfelejtette annak feloldó kódját. Segíts neki megtalálni a lehetséges kombinációkat, ha a kódról tudjuk, hogy egy olyan valódi négyjegyű szám, amelyre igaz, hogy minden számjegye különböző, a szám osztható néggyel, első és utolsó számjegyének összege 8, középső két számjegyének összege pedig 7.
Határozd meg az összes lehetséges kódot, amit a Mikulásnak érdemes kipróbálnia, azaz a feltételnek megfelel!
(A Mikulás többször is próbálkozhat, mint 3 lehetőség, hiszen csak feloldó kódot kerestünk.)

3. Misi várakozás közben nagyon unatkozott és elkezdett azon gondolkodni, hogy mi lenne, ha tenne egy lépést hátra, majd további 2 lépést hátra, utána 3 lépést előre, majd még 4 lépést előre, azután 5 lépést hátra, és még 6 lépést hátra, ezután 7-et előre, majd 8-at előre és így tovább egészen a 2021. lépésig.
Készíts egy matematikai modellt Misi lépéseinek követésére (figyelj, hogy az első néhány és az utolsó néhány lépés is szerepeljen a modellben), s határozd meg, hogy ezzel a módszerrel a 2021. lépés után Misi mennyit haladt előre!

4. Mekkora az ábrán látható Mikulás sapka (satírozott rész) területe, ha tudjuk, hogy a sapkát körülvevő téglalap kerülete 220 egység és az egyik oldal 10 cm -el hosszabb a másik oldalnál?



A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XIX. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI – 6. évfolyam

1. Mihály a lehető legnagyobb kerületű csokoládéháromszöggel szeretné meglepni testvérét idén karácsonykor. A háromszögről tudjuk, hogy az egyenlő szárú, valamint azt, hogy oldalai rendre $12x-5$, $6x+19$ és $3x+67$ mm hosszúságúak. Határozd meg a háromszög oldalainak hosszát, úgy hogy a háromszög kerülete maximális legyen!

Megoldás:
Mivel a feladat nem írja elő, hogy melyik két szár egyenlő, így meg kell nézni minden esetet.
I. eset: $12x-5=6x+19$
$6x=24$
$x=4$
Így az oldalak 43, 43, 79 mm hosszúságúak, a kerület pedig $K=79+43+43=165$ mm.
II. eset: $12x-5=3x+67$
$9x=72$
$x=8$
Így az oldalak 91, 91, 67 mm hosszúságúak, a kerület pedig $K=91+91+67=249$ mm.
III. eset: $6x+19=3x+67$
$3x=48$
$x=16$
Az oldalak 115, 115, 187 mm hosszúságúak, a kerület pedig $K=115+115+187=417$ mm.
A három eset kivizsgálásából láthatjuk, hogy a legnagyobb kerületet a 115, 115, 187 oldalú háromszög adja meg, már csak annyi a dolgunk, hogy leellenőrizzük létezik e ilyen háromszög: A háromszögegyenlőtlenség 115+115 > 187 alátámasztja, hogy lézető eset.

2. Mikulás bácsi olyan régen használta már telefonját, hogy elfelejtette annak feloldó kódját. Segíts neki megtalálni a lehetséges kombinációkat, ha a kódról tudjuk, hogy egy olyan valódi négyjegyű szám, amelyre igaz, hogy minden számjegye különböző, a szám osztható néggyel, első és utolsó számjegyének összege 8, középső két számjegyének összege pedig 7.
Határozd meg az összes lehetséges kódot, amit a Mikulásnak érdemes kipróbálnia, azaz a feltételnek megfelel!
(A Mikulás többször is próbálkozhat, mint 3 lehetőség, hiszen csak feloldó kódot kerestünk.)

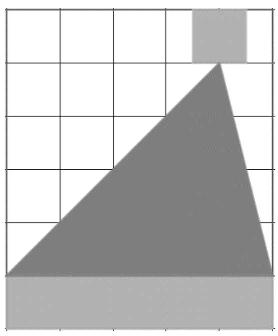
Megoldás:
Mivel a szám 4-gyel osztható kell, hogy legyen, így vizsgálhatjuk a szám végződéseit (20, 40, 60, 12, 32, 52, 72, 92, 04, 24, 44, 64, 84, 16, 36, 56, 76, 96, 08, 28, 48, 68, 88), tehát az utolsó számjegy lehet 0,2,4,6,8.
Mivel az első és az utolsó számjegy összege 8-at kell, hogy adjon így a 8 nem állhat az utolsó helyen, hiszen akkor az első helyre 0 kerülne, akkor pedig nem lenne 4 jegyű a szám. A 4-est is kizárhatjuk az utolsó számjegy helyéről, hiszen 4+4 esetében a számjegyek ismétlődnének, ami nem megengedett.
Szűkítettük a lehetséges eseteket az utolsó számjegy helyére, mégpedig 0,2,6 esetekre.
Az $abcd$ szám esetén, ha
1) $d=0$, akkor a feltételek szerint $a=8$,
valamint $c=4$, ahonnan $b=3$ vagy

$c=2$, ahonnan $b=5$, vagy $c=6$, ahonnan $b=1$, tehát a kód lehet 8340, 8520 vagy 8160.
2) $d=2$, akkor a feltételek szerint $a=6$,
valamint $c=1$, ahonnan $b=6$, ami nem jó, hiszen a 6-os ismétlődik vagy
$c=3$, ahonnan $b=4$ vagy
$c=5$, ahonnan $b=2$, ami nem jó, hiszen a 2-es ismétlődik vagy
$c=7$, ahonnan $b=0$. A lehetséges kombinációk 6432 és 6072.
3) $d=6$, akkor a feltételek szerint $a=2$,
valamint $c=1$, ahonnan $b=6$, ami nem jó, hiszen a 6-os ismétlődik vagy
$c=3$, ahonnan $b=4$ vagy
$c=5$, ahonnan $b=2$, ami nem jó, hiszen a 2-es ismétlődik vagy
$c=7$, ahonnan $b=0$. A lehetséges kombinációk 2436 és 2076.
Összesen 7 darab kód van, ami a feltételnek megfelel, ezek pedig
8160, 8340, 8520, 6432, 6072, 2436, és a 2076.

3. Misi várakozás közben nagyon unatkozott és elkezdett azon gondolkodni, hogy mi lenne, ha tenne egy lépést hátra, majd további 2 **lépést hátra, utána** 3 **lépést előre, majd még** 4 **lépést előre, azután 5 lépést hátra, és még** 6 **lépést hátra, ezután** 7-et **előre, majd** 8-at **előre és így tovább egészen a** 2021**. lépésig.**
Készíts egy matematikai modellt Misi lépéseinek követésére (figyelj, hogy az első néhány és az utolsó néhány lépés is szerepeljen a modellben), s határozd meg, hogy ezzel a módszerrel a 2021. **lépés után Misi mennyit haladt előre!**

Megoldás:
Kísérjük Misi lépéseit előjeles számokkal, a – hátra, a + előre.
Észrevehetjük, hogy két egymást követő lépést megy hátra, majd a két rákövetkezőt pedig előre, ez egy négyes ciklust jelent Misi lépéssorozatában, így meg tudjuk állapítani az utolsó lépések irányát is.
$2021=2020+1=505\cdot 4+1$, azaz a 2021. lépést hátra teszi meg.
A kapott modell pedig a következő:
$-1-2+3+4-5-6+7+8-9-10+11+12-\cdots-2017-2018+2019+2020-2021$
Nincs más dolgunk, mint összeadni ezt a 2021 darab különböző számot.
Vizsgáljuk a felfedezett 4-es ciklusokat, azaz $-1-2+3+4=4$, ahogyan a $-5-6+7+8=4$. Észrevehetjük, hogy minden négyes blokk összege pontosan 4.
505 darab ilyen blokkunk van, ami azt jelenti, hogy $505\cdot 4=2020$.
Ebből a 2020-ból még ki kell vonni a 2021-et, így a lépéssorozat összegeként -1-et kapunk. Azaz Misi egy ilyen játékos menetelés során mindössze egy lépést haladt volna hátra kiindulópontjához képest.

4. Mekkora az ábrán látható Mikulás sapka (satírozott rész) területe, ha tudjuk, hogy a sapkát körülvevő téglalap kerülete 220 **egység és az egyik oldal** 10 cm **-el hosszabb a másik oldalnál?**



Megoldás:
Először is számoljuk ki a téglalap oldalainak hosszát.

$K=2(a+b)$ kihasználva az oldalak közötti összefüggést:

$K=2(a+a+10)$ behelyettesítve az ismert értéket kapjuk, hogy:

$220=4a+20$ ahonnan

$4a=200$ azaz

$a=50$ egység.

Megkaptuk, hogy az egyik oldal 50 egység, a másik oldal pedig 60 egységnyi hosszú.

A kapott adatokat bejelölhetjük az ábrán, egyértelmű, hogy a rövidebbik oldal a téglalap alapja, a hosszabbik pedig a magassága.

Megvizsgálva a segédhálót, egyértelműen megállapítható, hogy egy kis négyzetrács oldala 10 egységnek felel meg.

Ettől kezdve már nagyon könnyű dolgunk lesz, a sapka alsó része 5 db kis négyzetből áll, így ennek a területe $5\cdot 100=500$ egységnégyzet.

A bojt is egyértelmű, hiszen éppen egy négyzetnyi, melynek területe 100 egységnégyzet.

A háromszög területét is könnyedén kiszámolhatjuk akkor is, ha a háromszög területszámítási módját még nem ismerjük.

Szedjük szét 2 darab háromszögre, melynek területei éppen egy 4 négyzetnyi téglalap fele, illetve egy $4\cdot 4=16$-os négyzet fele.

Ezek területe rendre $\frac{4\cdot 100}{2}=200$ és $\frac{16\cdot 100}{2}=800$ egységnégyzet.

A sapka területe pedig a vizsgált részek területének összege, azaz $500+100+200+800=1600$ egységnégyzet.