XIX. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2021. december 3.

<u>12. évfolyam</u>

1. Két egymást követő prímszámot ikerprímeknek nevezünk, ha a közöttük levő különbség 2. Határozd meg az összes olyan a és b ikerprímeket, $a<b$, amelyekre teljesül, hogy az $ab+1$ szám számjegyeinek összege 7.

2. Oldd meg a következő egyenletet az egész számok halmazában: $2021x^2 = 12y^2 + 4z^2$.

3. Adott az $ABCD$ trapéz. A trapéz alapjaira kívülről egy-egy téglalapot rajzolunk, amelyek egybevágóak, a trapéz száraira pedig szintén kívülről négyzetet rajzolunk. Bizonyítsd be, hogy ezeknek a téglalapoknak és négyzeteknek a középpontjai egy újabb négyzetet határoznak meg.

4. Adott az $X=\{1,2,...,n\}$ halmaz. Legyen $F=\{A_1, A_2, ..., A_m\}$ olyan halmaz, amelyre minden $i=1,2,...,m$ esetén $A_i \subseteq X$, valamint minden $1 \le i \le j \le m$ esetén $A_i \cap A_j \le 2$. Határozd meg az m legnagyobb lehetséges értékét!

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XIX. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI – 12. évfolyam

1. Két egymást követő prímszámot ikerprímeknek nevezünk, ha a közöttük levő különbség 2. Határozd meg az összes olyan a és b ikerprímeket, $a<b$, amelyekre teljesül, hogy az $ab+1$ szám számjegyeinek összege 7.

Megoldás: Egy megoldás létezik $a=3$, $b=5$. Megmutatjuk, hogy nincs több megoldás. Minden 3-nál nagyobb prímszámról ismeretes, hogy felírható $6k\pm1$ alakban. Ha a és b ikerprímek, akkor valamely k természetes számra pontosan $a=6k-1$ és $b=6k+1$. Ekkor $ab+1=(6k-1)(6k+1)+1=36k^2-1+1=36k^2$. Ez a szám viszont biztosan osztható 9-cel, azaz a számjegyeinek összege is legalább 9, tehát nem létezik más megoldás.

2. Oldd meg a következő egyenletet az egész számok halmazában: $2021x^2=12y^2+4z^2$.

Megoldás: Egy megoldás az $(x,y,z)=(0,0,0)$. Megmutatjuk, hogy nem létezik másik megoldás. Legyen (x_0,y_0,z_0) egy az előzőtől eltérő megoldás. Ekkor $2021{x_0}^2=12{y_0}^2+4{z_0}^2$. Ismeretes, hogy a négyzetszámok hárommal való osztási maradéka 0 vagy 1. Ekkor az előbbi egyenlőség bal oldalának hárommal való osztási maradéka 0 vagy 2, még a jobb oldal hárommal való osztási maradéka 0 vagy 1. Könnyen belátható, hogy megoldás csak akkor létezik, ha a jobb oldal és a bal oldal is osztható 3-mal, azaz, ha x_0 és z_0 is osztható hárommal. Legyen $x_0=3x_1$ és $z_0=3z_1$. Ekkor az előző egyenlőség felírható:

$$2021\cdot 9\cdot x_1^2=12y_0^2+4\cdot 9\cdot z_1^2.$$

Ha mindkét oldalt elosztjuk 3-mal, akkor a következőt kapjuk:

$$2021\cdot 3\cdot x_1^2=4y_0^2+4\cdot 3\cdot z_1^2.$$

Azaz, y_0 is osztható 3-mal, vagyis $y_0=3y_1$. Ekkor

$$2021\cdot 3\cdot x_1^2=4\cdot 9\cdot y_1^2+4\cdot 3\cdot z_1^2,$$

ahol, ha ismét elosztjuk mindkét oldalt 3-mal a következőt kapjuk:

$$2021x_1^2=12y_1^2+4z_1^2.$$

Tehát ha egy (x_0,y_0,z_0) számhármas megoldása az adott egyenletnek, akkor az $\left(\frac{x_0}{3},\frac{y_0}{3},\frac{z_0}{3}\right)$ számhármas is megoldása az egyenletnek. Analóg módon belátható, hogy ekkor bármely k természetes szám esetén az $\left(\frac{x_0}{3^k},\frac{y_0}{3^k},\frac{z_0}{3^k}\right)$ számhármas is megoldása az adott egyenletnek. Mivel csakis egész számokról van szó, ezért az egyetlen olyen számhármas, amely kielégíti az adott feltételeket csak a $(0,0,0)$.

3. Adott az $ABCD$ trapéz. A trapéz alapjaira kívülről egy-egy téglalapot rajzolunk, amelyek egybevágóak, a trapéz száraira pedig szintén kívülről négyzetet rajzolunk. Bizonyítsd be, hogy ezeknek a téglalapoknak és négyzeteknek a középpontjai egy újabb négyzetet határoznak meg.

Megoldás: Legyenek F és H a négyzetek csúcsai, G a trapéz alatti I pedig a trapéz feletti téglalap csúcsa. Könnyen belátható, hogy az F középpontú 90°-os elforgatás a G pontot az I pontra képezi le, akárcsak az, hogy a H középpontú 90°-os elforgatás az I pontot a G pontra képezi le. Tehát az $FGHI$ négyszögben $IF = FG$, $GH = HI$, valamint az F és G csúcsoknál lévő szögek derékszögűek. Ez a konfiguráció csak akkor létezhet, ha $FGHI$ négyzet.

4. Adott az $X = \{1, 2, ..., n\}$ halmaz. Legyen $F = \{A_1, A_2, ..., A_m\}$ olyan halmaz, amelyre minden $i = 1, 2, ..., m$ esetén $A_i \subseteq X$, valamint minden $1 \le i \le j \le m$ esetén $A_i \cap A_j \le 2$. Határozd meg az m legnagyobb lehetséges értékét!

Megoldás: Az F halmaz tartalmazhatja az X halmaz összes legfeljebb 3 elemű részhalmazát, azaz $m \ge \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}$. Mutassuk meg, hogy ez egyben felső korlát is az m értékére. Ezt úgy fogjuk megtenni, hogy bebizonyítjuk, hogy ha F egy maximális elemszámú halmazrendszer, akkor nem tartalmazhat négy- vagy attól többelemű halmazt. Tegyük fel az ellenkezőjét, hogy F-ben van egy legalább négyelemű halmaz. Ekkor ezt a halmazt kicserélhetjük az ő összes háromelemű részhalmazára. Ezek a halmazok biztosan nem szerepelnek F-ben, mert különben létezett volna F-ben háromelemű metszet. Így viszont ellentmondáshoz jutottunk azzal a ténnyel, hogy F egy maximális elemszámú halmazrendszer.