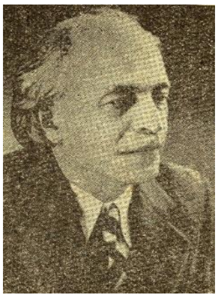


XXII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2024. december 8.

<u>11. évfolyam</u>

1. Melyek azok az $a,\ b,\ c$ **természetes számok, amelyekre** $2024=(a+b)\cdot(2b+c)\cdot(a+c)$**.**

2. Határozd meg mindazon m **valós számot, amelyre az**

$$x^3-12x^2+mx-60=0$$

egyenlet megoldásai egy derékszögű háromszög oldalainak mérőszámai!

3. Legyenek A **és** B **pontok egy körvonal pontjai,** P **és** Q **pedig olyan pontok, amelyekre az** AP **és** BQ **a kör érintői, miközben** $AP\cong BQ$**, és a** PQ **egyenes nem párhuzamos az** AB **egyenessel. Igazold, hogy az** AB **egyenes felezi a** PQ **szakaszt!**

4. Oldd meg a valós számok halamazán: $\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x+\sin^2 4x=2$ **.**

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XXII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI – 11. évfolyam

1. Melyek azok az $a,\ b,\ c$ természetes számok, amelyekre $2024=(a+b)\cdot(2b+c)\cdot(a+c)$**.**

Megoldás. Kezdőhelyzetben felbontjuk a 2024-et primtényezőkre, $2024=2^3\cdot 11\cdot 23$, akkor a lehetséges felbontásra $\begin{matrix} a+b=4 \\ 2b+c=22 \\ c+a=23 \end{matrix}$ a megoldás: $a=3,\quad b=1,\quad c=20$.

Egy másik lehetséges felbontás: $\begin{matrix} a+b=22 \\ 2b+c=4 \\ c+a=23 \end{matrix}$ ahonnan: $a=21,\quad b=1,\quad c=2$.

A többi felbontás nem vezet eredményhez.

2. Határozd meg mindazon m valós számot, amelyre az

$$x^3-12x^2+mx-60=0$$

egyenlet megoldásai egy derékszögű háromszög oldalainak mérőszámai!

Megoldás. Jelöljük az egyenlet megoldásait $a,\ b,\ c$ –vel, amelyek a derékszögű háromszög oldalainak mérőszámai, és $c^2=a^2+b^2$.

A Viéte-szabály szerint $\begin{matrix} a+b+c=12 \\ ab+bc+ca=m \end{matrix}$

Tehát $2c^2=a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2\cdot(ab+bc+ca)=144-2m$,

vagyis $2c^2=144-2m \quad\Rightarrow\quad m=72-c^2$.

Mivel $0=c^3-12c^2+mc-60=c^3-12c^2+(72-c^2)\cdot c-60=-12c^2+72c-60$,

azaz $c^2-6c+5=0 \Rightarrow c=1 \quad vagy \quad c=5$.

I eset: c=1, akkor $a+b=11$, ez pedig ellentmondáshoz vezet, mert azt kapjuk, hogy a háromszög egyik befogója nagyobb, mint az átfogója.

II eset: $c=5 \Rightarrow a=3,\ b=4$ megoldást kapjuk.

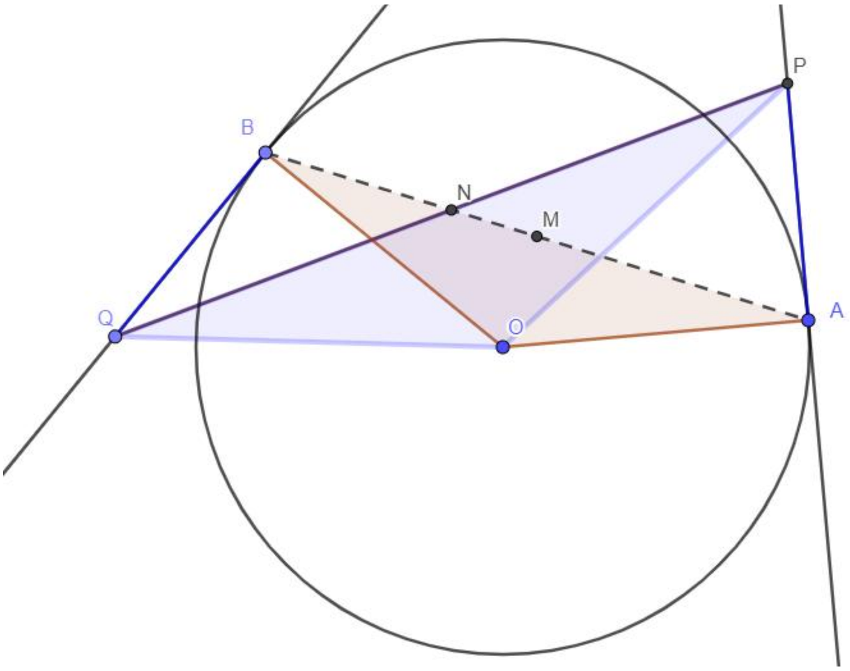
Az m értéke tehát 47.

3. Legyenek A és B pontok egy körvonal pontjai, P és Q pedig olyan pontok, amelyekre az AP és BQ a kör érintői, miközben $AP\cong BQ$, és a PQ egyenes nem párhuzamos az AB egyenessel. Igazold, hogy az AB egyenes felezi a PQ szakaszt!

Megoldás. Legyenek az M és N pontok az AB illetve PQ szakaszok felezőpontjai.

Az adatok alapján $\left\{\begin{matrix} AP\cong QB \\ OA\cong OB \\ OAP\angle\cong OBQ\angle=90° \end{matrix}\right\}\Rightarrow OAP\Delta\cong OBQ\Delta$

Ezért $\left.\begin{cases} OP \cong OQ \\ OA \cong OB \\ AOB\angle = AOP\angle + POB\angle = BOQ\angle + POB\angle = POQ\angle \end{cases}\right\} \Rightarrow OPQ\Delta \approx OAB\Delta$



Tehát az OMN és OAP háromszögek hasonlók, mert az előzőek alapján $OM : ON = OA : OP$
És $MON\angle = PON\angle - POM\angle = AOM\angle - POM\angle = AOP\angle$, tehát az OMN derékszög, ezért A, B és N pontok kollineárisak, vagyis a PQ szakasz N felezőpontja illeszkedik az AB húrhoz.

4. Oldd meg a valós számok halamazán: $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x = 2$ **.**

Megoldás. $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x = 2$

$$\Rightarrow \frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1-\cos 4x}{2} + \frac{1-\cos 6x}{2} + \frac{1-\cos 8x}{2} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot 4 + \frac{-\cos 2x}{2} + \frac{-\cos 4x}{2} + \frac{-\cos 6x}{2} + \frac{-\cos 8x}{2} = 2$$

$$\Rightarrow \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x = 0$$

$$\Rightarrow 2\cos 5x \cdot \cos 3x + 2\cos 5x \cos x = 0$$

$$\Rightarrow \cos 5x \cdot (\cos 3x + \cos x) = 0$$

$$\Rightarrow \cos 5x \cdot \cos 2x \cdot \cos x = 0$$

$$\Rightarrow \cos 5x = 0 \ \vee \ \cos 2x = 0 \ \vee \ \cos x = 0 .$$

Tehát a megoldások $x \in \left\{ \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5}, \ \frac{\pi}{4} + \frac{m\pi}{2}, \ \frac{\pi}{2} + n\pi \,\middle|\, k \in Z, \ m \in Z, \ n \in Z \right\}$.