



XV. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2017. december 2.

8. évfolyam

- 1. Adott 101 szám egy körvonalon. Közülük bármely három egymás mellett elhelyezkedő szám összege 15. Határozd meg az adott 101 szám összegét!**
- 2. Az ABC háromszögben $AB = BC$. A háromszög AD belső szögfelezője kétszer olyan hosszú, mint az AE magasság (a D és E pontok a BC egyenesre illeszkednek). Határozd meg a háromszög belső szögeinek nagyságát!**
- 3. Öt prímszám szorzata egyenlő az összegük 105-szörösével. Melyek lehetnek ezek a számok?**
- 4. Egy röplabda bajnokságon 319 pontot osztottak ki. A győzelem 3 pontot, a döntetlen 1 pontot a vereség pedig 0 pontot ért. Hány csapat vett részt a bajnokságon, ha tudjuk, hogy mindenki mindenkivel 2 meccset játszott és a döntetlenek száma megegyezik a csapatok számával?**

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

MEGOLDÁSOK – 8. évfolyam

1. Adott 101 szám egy körvonalon. Közülük bármely három egymás mellett elhelyezkedő szám összege 15. Határozd meg az adott 101 szám összegét!

Megoldás: Legyen három szomszédos szám: x , y , és z . Mivel bármely 3 szám összege 15, az y és z számok után ismét x -nek kell következnie, azaz ezek a számok ismétlődnek. A 101 hárommal osztva 2 maradékot ad, tehát a hármas ciklusok felírása után kimarad 2 szomszédos szám. Ezek egyik irányból nézve a z -t követő számok, azaz x és y , a másik irányból nézve pedig az x -et megelőző számok, vagyis y és z .

Ebből az következik, hogy minden szám megegyezik a körön és $x = y = z = \frac{15}{3} = 5$.

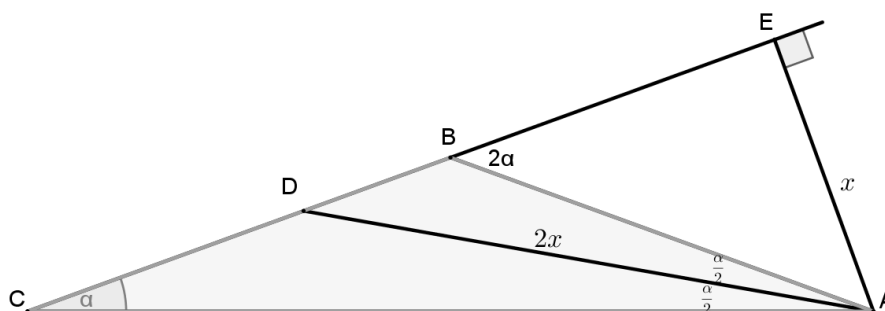
Válasz: A 101 szám összege 505.

2. Az ABC háromszögben $AB = BC$. A háromszög AD belső szögfelezője kétszer olyan hosszú, mint az AE magasság (a D és E pontok a BC egyenesre illeszkednek). Határozd meg a háromszög belső szögeinek nagyságát!

Megoldás: Jelöljük az ABC háromszög alapon fekvő szögeit α -val. Vegyük észre, hogy az AED háromszög egy fél szabályos háromszög, azaz az A csúcsánál lévő szöge 60° . Az ABE szög az ABC háromszög külső szöge és nagysága megegyezik az alapon fekvő szögek összegével, $\angle ABE = 2\alpha$. Innen kifejezhető az ABE derékszögű háromszög A csúcsánál lévő szöge is, $\angle EAB = 90^\circ - 2\alpha$, valamint felírható a következő egyenlet: $90^\circ - 2\alpha + \frac{\alpha}{2} = 60^\circ$. Innen már kiszámítható a

háromszög belső szögeinek nagysága.

Válasz: $\alpha = 20^\circ$ és $\beta = 140^\circ$.



3. Öt prímszám szorzata egyenlő az összegük 105-szörösével. Melyek lehetnek ezek a számok?

Megoldás: Legyenek ezek a prímek: p, q, r, s és t . Felírható, hogy $pqrst = 105 \cdot (p + q + r + s + t)$. Mivel prímek, és a 105 felírható a 3, 5 és 7 szorzataként, ezért az öt primünk közül már ismert három, melyeket tetszőlegesen választhatunk meg.

Az egyenlet a következő képpen alakul: $pq = 15 + p + q$. Ebből az egyenletből

kifejezve az egyik változót: $p = \frac{15+q}{q-1} = 1 + \frac{16}{q-1}$. Ez azt jelenti, hogy a 16 osztható

$q-1$ kifejezéssel, azaz $q-1 \in 1, 2, 4, 8, 16$, vagyis $q \in 2, 3, 5, 9, 17$. Innen kiszámíthatóak a p értékei, $p \in 17, 9, 5, 3, 2$. Ezek a számpárok közül a feladat feltételeinek csak azok felelnek meg, amelyekben a pár mindkét tagja prím. Ezek: $q = 2$ és $p = 17$, vagy $p = q = 5$.

Válasz: A keresett számok lehetnek: 2, 3, 5, 7, 17 vagy 3, 5, 5, 5, 7.

4. Egy röplabda bajnokságon 319 pontot osztottak ki. A győzelem 3 pontot, a döntetlen 1 pontot a vereség pedig 0 pontot ért. Hány csapat vett részt a bajnokságon, ha tudjuk, hogy mindenki mindenkivel 2 meccset játszott és a döntetlenek száma megegyezik a csapatok számával?

Megoldás: Legyen a csapatok száma n . A meccsek száma $n(n-1)$. A győzelmek száma $n(n-1) - n = n(n-2)$. A kiosztott pontok száma, tehát: $3n(n-2) + 2n = 319$. A bal oldalt átalakítva: $n(3n-4) = 319$. Mivel a 319 prímtényezői a 11 és 29, ezért a csapatok száma 11.

Válasz: 11 csapat vett részt a bajnokságon.