XIX. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2021. december 3.

11. évfolyam

1. Ötfaluban a telefonszámok ötjegyűek és az első számjegy nem lehet nulla. *Menőnek* tartják azokat a számokat, amelyeknek jegyei csökkenő vagy növekvő sorrendben következnek egymás után. (Így például az 12459 **menő szám, de az** 11234 **és az** 10345 **nem azok. Határozd meg az összes ötfalui menő telefonszámok számát!**

2. Legyen BH **az** ABC **háromszög magasságvonala. A** k **kör középpontja a** BH **szakaszon van és tartalmazza a** B **és** C **csúcsokat, valamint ez a kör metszi az** AB **szakaszt az** E **pontban,** $E \neq B$**. Ha az** AB **szakasz hossza** 16**, a** BC **szakasz hossza** 12**, határozd meg az** AE **szakasz hosszát!**

3. Adott az $4x^2-(3a+1)x-a-2=0$ **egyenlet. Határozd meg az** $a \in \mathbb{R}$ **minden olyan értékét, amelyre az adott egyenlet** x_1 **és** x_2 **megoldásaira (gyökeire) érvényes, hogy** $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2} \geq \frac{40}{9}$**. Milyen** $a \in \mathbb{R}$ **értékekre lesz az egyenlet mindkét megoldása (gyöke) a** $(-1,\ 2)$ **intervallumban?**

4. Oldd meg a $\sin x+\cos x+\sin x \cdot \cos x=1$ **egyenletet!**

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

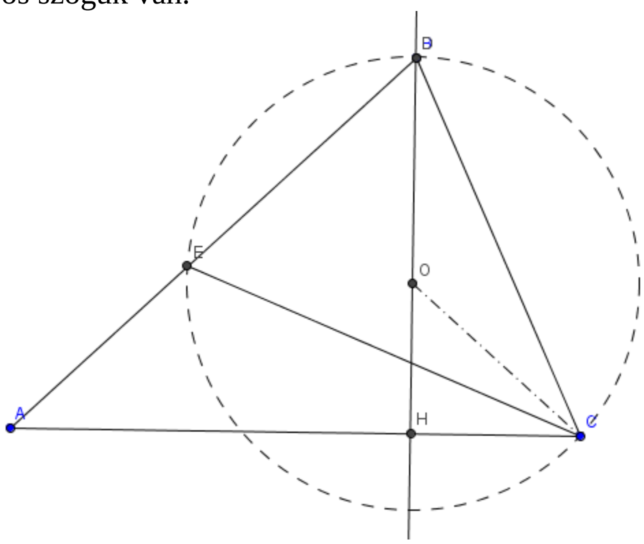
XIX. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI – 11. évfolyam

1. Ötfaluban a telefonszámok ötjegyűek és az első számjegy nem lehet nulla. *Menőnek* tartják azokat a számokat, amelyeknek jegyei csökkenő vagy növekvő sorrendben következnek egymás után. (Így például az 12459 menő szám, de az 11234 és az 10345 nem azok. Határozd meg az összes ötfalui menő telefonszámok számát!

Megoldás: Ha a számjegyekből kiválasztunk 5-öt, akkor ezekből pontosan egy csökkenő menő telefonszámot készíthetünk és ezek száma $\binom{10}{5}=252$. A növekvő menő telefonszámokban nem lehet a 0, ezért ezek száma $\binom{10}{4}=126$. Tehát összesen 378 menő telefonszám van.

2. Legyen BH az ABC háromszög magasságvonala. A k kör középpontja a BH szakaszon van és tartalmazza a B és C csúcsokat, valamint ez a kör metszi az AB szakaszt az E pontban, $E \neq B$. Ha az AB szakasz hossza 16, a BC szakasz hossza 12, határozd meg az AE szakasz hosszát!

Megoldás: Legyen O pont a k kör középpontja, és jelölje $ABC\sphericalangle=\beta,\ BAC\sphericalangle=\alpha,\ ACB\sphericalangle=\gamma$ a háromszög belső szögeit. Ekkor $OBC\sphericalangle=90°-\gamma$ és mivel BOC háromszög egyenlő szárú, ezért $OCB\sphericalangle=90°-\gamma$. Tehát a BOC háromszög belső szögei $BOC\sphericalangle=180°-2\cdot(90°-\gamma)=2\gamma$. A $BOC\sphericalangle$ középponti szögnek $BEC\sphericalangle$ kerületi szög felel meg, azaz $BEC\sphericalangle=\gamma$ Ezek alapján $ABC_\triangle \sim CBE_\triangle$ hasonló háromszögek, mert a B csúcsnál közös szögük van.



Tehát megfelelő oldalaik arányosak: $\dfrac{BC}{BE}=\dfrac{BA}{BC}$, vagyis $BE=9$. Végül pedig $AE=AB-BE=7$.

3. Adott az $4x^2-(3a+1)x-a-2=0$ egyenlet. Határozd meg az $a\in\mathbb{R}$ minden olyan értékét, amelyre az adott egyenlet x_1 és x_2 megoldásaira (gyökeire) érvényes, hogy $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}\geq\frac{40}{9}$. Milyen $a\in\mathbb{R}$ értékekre lesz az egyenlet mindkét megoldása (gyöke) a $(-1,\ 2)$ intervallumban?

Megoldás: Ha az $a\neq-2$, akkor a megoldások különböznek nullától és a Viéte-szabály alapján $x_1+x_2=\frac{3a+1}{4}$ és $x_1\cdot x_2=-\frac{a+2}{4}$. Ekkor

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1^2\cdot x_2^2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1^2x_2^2}=\frac{9a^2+14a+17}{(a+2)^2}.$$

Mivel az $(a+2)^2>0$, ezért a feltétel átalakul $9(9a^2+14a+17)\geq40(a+2)^2$ formába, vagyis $41a^2-34a-7\geq0$, amelynek a megoldásai $-\frac{7}{41}$ és 1, ez alapján az egyenlőtlenség megoldási halmaza $\left(-\infty,\ -\frac{7}{41}\right]\cup[1,\ +\infty)$. Ez alapján

$$a\in\left(-\infty,\ -2\right)\cup\left(-2,\ -\frac{7}{41}\right]\cup[1,\ +\infty).$$

Legyen $f(x)=4x^2-(3a+1)x-a-2$, ha a megoldások a $(-1,\ 2)$ intervallumban vannak, akkor $f(-1)$ és $f(2)$ egyező előjelű, vagyis $f(-1)\cdot f(2)>0$, valamint a parabola csúcsa a $(-1,\ 2)$ intervallumban van, azaz $-1<\frac{3a+1}{8}<2$ és $f(-1)\cdot f\left(\frac{3a+1}{8}\right)<0$.

Mivel az $f(-1)=2a+3$ és $f(2)=-7a+12$, és $f\left(\frac{3a+1}{8}\right)=-\frac{9a^2+22a+33}{16}$, ezért $(2a+3)(-7a+12)>0$, $-3<a<5$, $\frac{9a^2+22a+33}{16}\cdot(2a+3)>0$.

Ezek közös megoldása $a\in\left(-\frac{3}{2},\ \frac{12}{7}\right)$.

4. Oldd meg a $\sin x+\cos x+\sin x\cdot\cos x=1$ egyenletet!

Megoldás: Legyen a $\sin x+\cos x=t$, és mivel a $(\sin x+\cos x)^2=1+2\sin x\cos x$, akkor $\sin x\cdot\cos x=\frac{1}{2}(t^2-1)$. Az egyenlet alakja $t^2+2t-3=0$. Ennek megoldásai az 1 és a -3, de ez utóbbi nem lehet, mert $\sin x+\cos x>-2$. Tehát a megoldás $\sin x+\cos x=1$, azaz $\sin x=1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$, ahonnan $2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=2\sin^2\frac{x}{2}$, ezért $\sin\frac{x}{2}=0$, ahonnan

$x=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$, vagy $tg\frac{x}{2}=1\Rightarrow\frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+m\pi,\ m\in\mathbb{Z}$, amiből a megoldás $x=\frac{\pi}{2}+2m\pi,\quad m\in\mathbb{Z}$.

Másik módon, $\sin x+\cos x=1\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, akkor az addiciós tétellel $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+2n\pi,\ n\in\mathbb{Z}$ és ezért $x=2n\pi,\quad n\in\mathbb{Z}$, vagy $x+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+2n\pi,\ n\in\mathbb{Z}$, ahonnan $x=\frac{\pi}{2}+2n\pi,\quad n\in\mathbb{Z}$.