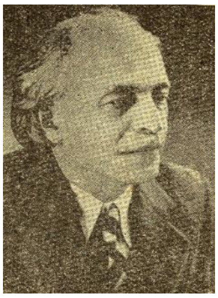
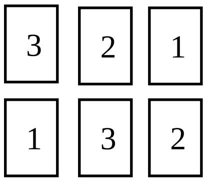


XXII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2024. december 8.

<u>7. évfolyam</u>

1. Lucának 6 darab számkártyája van, amiken az 1, 2 vagy 3 számjegy szerepel. Mindegyik fajtából pontosan kettő darab van. Hány különböző négyjegyű számot tud kirakni ezekből a lapokból?



2. Miki kigondolt négy számot. Minden lehetséges módon kiválasztott közülük hármat, és a számok összegét felírta a táblára. Így a 2044, 4047, 2031 és a 4043 számok maradtak a táblán. Misi is bejott a terembe, de Miki addigra már elfelejtette, hogy milyen számokra gondolt, így csak elmesélte, hogyan keletkeztek. Misi kiváló matematikus, gyorsan megmondta a gondolt számokat. Neked sikerül-e? Válaszodat indokold!

3. Az ABC egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogója az AB oldal. A BC oldalra megszerkesztjük a BCD egyenlő oldalú háromszöget. Határozd meg az ADB szöget!

4. Egy szabályos hétszög bármely három csúcsa háromszöget határoz meg. Hányadrészük egyenlő szárú?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XXII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI – <u>7. évfolyam</u>

1. Lucának 6 darab számkártyája van, amiken az 1, 2 vagy 3 számjegy szerepel. Mindegyik fajtából pontosan kettő darab van. Hány különböző négyjegyű számot tud kirakni ezekből a lapokból?

3	2	3
1	2	1

Megoldás. Mivel csak 3 féle kártya van, így egy számjegynek biztosan ismétlődnie kell. A megoldások két csoportra bonthatóak:

1. Mindhárom féle kártyából van a számban, de egy ismétlődik: $1, 1, 2, 3$ vagy $1, 2, 2, 3$ vagy $1, 2, 3, 3$.
   Az $1, 1, 2, 3$ esetben a kettesnek 4 hely közül választhatunk, a hármasnak már csak 3 közül. A két egyes két megmaradt helyre kerül. Tehát ebből a négy kártyából $4 \cdot 3 = 12$ féle négyjegyű szám alkotható.
   A másik két esetben is hasonlóképpen lehet gondolkodni, így ebből a típusból 36 féle megoldást kapunk.
2. Csak kétféle kártya szerepel a négyjegyű számban, mindkettőből 2 darab. Például, ha a $2, 2, 3, 3$ számjegyekből gondolkodunk, akkor először a ketteseknek ki kell választanunk két helyet: az elsőnek 4 hely közül választhatunk, a másodiknak már csak 3 közül. Ez 12 féle lehetőség lenne. Viszont, mivel két egyforma kártyáról van szó, nem lehet megkülönböztetni, hogy melyik került oda előbb és melyik később, így minden megoldást kétszer számoltunk. Tehát $\frac{12}{2} = 6$ féleképp tehetjük le a két darab kettes kártyát. A 3-asokat már csak odatesszük a megmaradt helyekre.
   A kétféle kártya háromféleképp választható ki: a $2, 3$ vagy az $1, 3$ esetleg az $1, 2$ kártyákból használhatunk két-két darabot. Így ebből a típusból összesen $3 \cdot 6 = 18$ féle különböző négyjegyű szám alkotható.

A két csoportnak nincs közös eleme, ezért a végső megoldás $36 + 18 = 54$.

2. Miki kigondolt négy számot. Minden lehetséges módon kiválasztott közülük hármat, és a számok összegét felírta a táblára. Így a 2044, 4047, 2031 és a 4043 számok maradtak a táblán. Misi is bejott a terembe, de Miki addigra már elfelejtette, hogy milyen számokra gondolt, így csak elmesélte, hogyan keletkeztek. Misi kiváló matematikus, gyorsan megmondta a gondolt számokat. Neked sikerül-e? Válaszodat indokold!

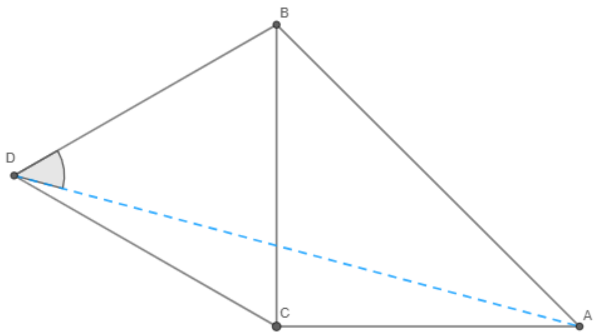
Megoldás. Tegyük fel, hogy Miki az A, B, C és D számokra gondolt. Misi a táblán látható számok összegét gyorsan kiszámította fejből: 12165-öt kapott. A számokból négyféleképpen alkothatott háromelemű részhalmazt, mindig más-más elemet hagyva el: $\{A, B, C\}$, $\{A, B, D\}$, $\{A, C, D\}$, $\{B, C, D\}$. Látható, hogy mind a négy elem pontosan háromszor szerepel a részhalmazokban. Tehát, ha a 12165-öt 3-mal osztjuk, akkor épp a négy szám összegét, $A + B + C + D$-t kapjuk meg, ami 4055. A táblán szereplő összegek három gondolt számból tevődnek össze, így az egyik szám $4055 - 2044 = 2011$ (a versenyzők születési éve), a többi pedig 8, 2024, 12 (amikből a mai dátum alkotható meg).

3. Az ABC egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogója az AB oldal. A BC oldalra megszerkesztjük a BCD egyenlő oldalú háromszöget. Határozd meg az ADB szöget!

Megoldás. A feladat leírása alapján egyértelműen fennállnak a következő összefüggések: (1) $AC = BC = CD = BD$ (mivel ABC háromszög egyenlő szárú, BCD háromszög viszont egyenlő oldalú)

(2) $CAB\sphericalangle = ABC\sphericalangle = 45°$ (mert ABC háromszög egyenlő szárú és derékszögű)

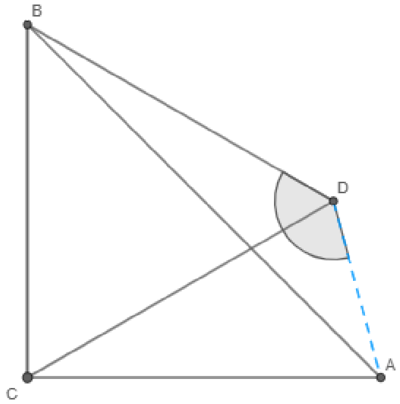
(3) $CBD\sphericalangle = BDC\sphericalangle = DCB\sphericalangle = 60°$ (mert BCD háromszög egyenlő oldalú).



1. eset.

$DCA\sphericalangle = 90° + 60° = 150°$. Mivel ADC egyenlő szárú háromszög (1), ezért $ADC\sphericalangle = \frac{180° - 150°}{2} = 15°$.

Tehát $ADB\sphericalangle = 60° - 15° = 45°$.



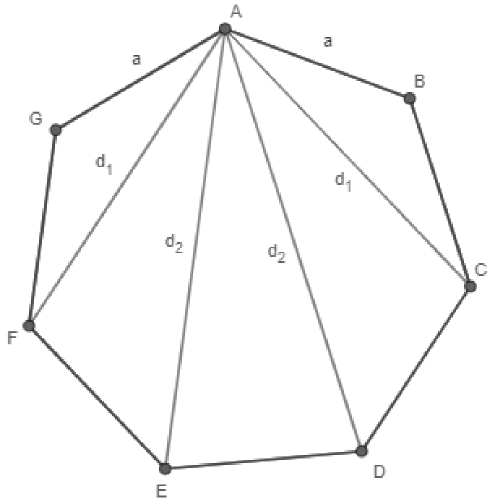
2. eset.

(1) alapján következik, hogy az ACD háromszög egyenlő szárú. A csúcsánál lévő $ACD\sphericalangle = 90° - 60° = 30°$. Az alapján lévő $ADC\sphericalangle = \frac{180° - 30°}{2} = 75°$.

Tehát ebben az esetben a keresett $ADB\sphericalangle = 75° + 60° = 135°$.

A megoldást csak akkor tekintjük teljes értékűnek, ha a versenyző mindkét esetben megoldotta a feladatot.

4. Egy szabályos hétszög bármely három csúcsa háromszöget határoz meg. Hányadrészük egyenlő szárú?



Megoldás. A hétszög egy csúcsából hat szakasz rajzolható a többi csúcsok felé. Ezek közül kettő a szabályos hétszög oldalát képezi (a), van közöttük két olyan átló, aminek az egyik oldalán 1, a másikon 4 csúcs található (d_1), és és két olyan átló, aminek az egyik oldalán 2, a másikon 3 csúcs van (d_2). Az azonos betűvel jelölt szakaszok egyenlő hosszúságúak, ez a hétszög szabályosságából fakad.

A hét csúcsból bármely hármat kiválasztva egy-egy háromszöget kapunk, tehát $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ lehetséges háromszögről lenne szó. Viszont a csúcsok kiválasztásának sorrendje nem lényeges, mert az ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA ponthármasok ugyanazt a háromszöget írják le. Ezért a lehetséges háromszögek száma $\frac{210}{6} = 35$. Ezek közül 7 olyan van, tartalmazza a hétszög két szomszédos oldalát, 7 olyan, aminek az oldalai között 2 darab d_1 típusú átló van, valamint 7 olyan is, aminek az oldalai között két d_2 típusú oldal is van. A többi 14 darab háromszögnek különböző hosszúságú oldalai vannak. Minden csúcshoz 2 ilyen háromszög tartozik (például az A-hoz az AFE és az ACD), tehát a háromszögek $\frac{3}{5}$-e egyenlő szárú.