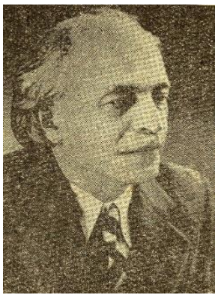


XVIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2021. január 30.

8. évfolyam

1. Igaz-e, hogy három négyzetszám közül mindig kiválasztható kettő, amelyek különbsége osztható néggyel? Válaszodat indokold!

2. Mely számjegyeket jelölhetik az x **és** y **ismeretlenek, ha a** $\frac{163+\overline{1xy}}{\overline{2yx}}$ **tört értéke kisebb mint 1?**

3. Az A, B, C, D **és** E **pontokat úgy vettük fel egy kör kerületén, hogy az** AB, BC, CD **és** DE **szakaszok meghúzása után a** B, C **és** D **pontoknál lévő szögek mindegyike** 45°**. Mutassuk meg, hogy**

$$AB^2 + CD^2 = BC^2 + DE^2 .$$

4. A focilabda 32 **db bőrdarabból van összevarrva: fehér hatszögletű és fekete ötszögletű darabokból. Mindegyik fekete csak fehér bőrdarabbal határos, és mindegyik fehér három feketével és három fehérrel. Hány fehér és hány fekete színű bőrdarab van a labdán? Válaszodat indokold!**

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XVIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI – 8. évfolyam

1. Igaz-e, hogy három négyzetszám közül mindig kiválasztható kettő, amelyek különbsége osztható néggyel? Válaszodat indokold!

Megoldás: Igaz, a skatulyaelv alapján. A négyzetszámok néggyel való osztási maradéka csak 0 vagy 1 lehet. Három négyzetszám közül kettőnek biztosan megegyezik a néggyel való osztási maradéka, így ennek a két számnak a különbsége osztható néggyel.

2. Mely számjegyeket jelölhetik az x és y ismeretlenek, ha a $\frac{163+\overline{1xy}}{\overline{2yx}}$ tört értéke kisebb mint 1?

Megoldás: A $\frac{163+\overline{1xy}}{\overline{2yx}}<1$ egyenlőtlenség felírható $163+100+10x+y<200+10y+x$ alakban, amelyből rendezés után a $7+x<y$ összefüggést kapjuk.

Mivel x és y számjegyeket jelölnek, ezért értékeik egész számok, melyek 0 és 9 között változhatnak. Így három megoldást különböztethetünk meg:

$I.\ x=0$ és $y=8$

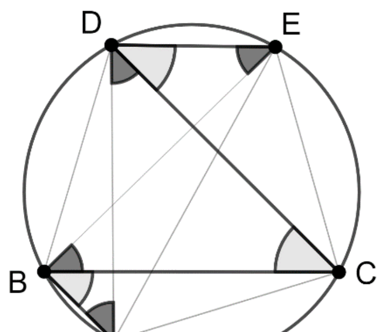
$II.\ x=0$ és $y=9$

$III.\ x=1$ és $y=9$

3. Az A, B, C, D és E pontokat úgy vettük fel egy kör kerületén, hogy az AB, BC, CD és DE szakaszok meghúzása után a B, C és D pontoknál lévő szögek mindegyike 45°. Mutassuk meg, hogy

$$AB^2+CD^2=BC^2+DE^2.$$

Megoldás: Húzzuk meg az AC, CE, AE, BD és AD szakaszokat. A kerületi szögekre vonatkozó tétel alapján következik, hogy az ábrán sötéttel jelölt szögek is 45°-osak, illetve igazak a következő egyenlőségek: $AC=BD=CE, BC=AD$ és $BE=CD$.



Az AEB és ADE háromszögek derékszögűek és AE a kör átmérője.

A Pitagorasz-tétel alapján felírható:

$AE^2=AD^2+DE^2=BC^2+DE^2$

$AE^2=AB^2+BE^2=AB^2+CD^2$

Azaz: $AB^2+CD^2=BC^2+DE^2$.

4. A focilabda 32 **db bőrdarabból van összevarrva: fehér hatszögletű és fekete ötszögletű darabokból. Mindegyik fekete csak fehér bőrdarabbal határos, és mindegyik fehér három feketével és három fehérrel. Hány fehér és hány fekete színű bőrdarab van a labdán? Válaszodat indokold!**

Megoldás: Legyen x a fehér darabok száma, ekkor $32-x$ a feketéké. Minden fekete darabnak öt fehér szomszédja van, de ilyen módon minden fehér darabot háromszor számolunk meg, mivel minden fehér 3 feketével érintkezik. A fehér darabok száma így írható fel:

$$x=\frac{5\cdot(32-x)}{3}.$$

Innen $x=20$. Azaz a focilbda 20 fehér és 12 fekete darabból áll.