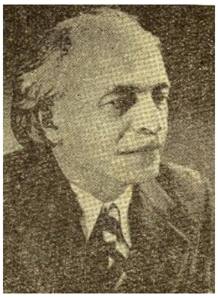


XX. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2022. december 3.

7. évfolyam

1. Mihály apó puttonya mézes pogácsával van tele. Kiveszünk belőle 11-et, és ebből 9-et egy dobozba, 2-t pedig egy tálba teszünk. Újra kiveszünk 11-et, az előbbi módon elosztjuk, majd ezt addig folytatjuk, míg a puttonyban már csak 9 mézes pogácsa marad.
Ekkor a tál tartalmát kezdjük felosztani hasonlóképp: egyszerre 11-et markolunk belőle, ebből 9 egy tasakba kerül, 2 pedig egy tányérra, egészen addig míg a tányéron 66 pogácsa nem lesz, a tálban viszont csak 3 marad. Hány mézes süti volt Mihály apó puttonyában eredetileg?

2. Egy nagy társaságba jófejek és füllentők jöttek össze. A jófejek mindig igazat mondanak, a füllentők viszont mindig fülletenek.
a) Egy kerek asztal köré kilencen ülnek le. Valaki megkérdezi őket, hogy milyen természetű emberek között ülnek. Mindenki ugyanazt a választ adja: „*az egyik szomszédom jófej, a másik füllentő*”. Hány jófej és hány füllentő ülhet az asztalnál? Van-e többféle megoldás?
b) Mi a helyzet abban az esetben, ha egy 7 fős asztal körül kapjuk ugyanezeket a válaszokat? Ebben az esetben van-e többféle megoldás?
c) Általános esetben (tetszőleges számú személy ül az asztal körül) mi a megoldás?

3. Adott az $\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)$ **kifejezés.**

Tehát, ha $n=2$**, akkor a kifejezés értéke** $\frac{3}{2}$ **lesz.**

a) Mennyi a kifejezés értéke, ha $n=5$**?**
b) Ha tudjuk, hogy a kifejezés értéke 2022, hány tényező alkotja a szorzatot?

4. Az ABC **háromszög külső szögfelező egyenesei (a külső szögek szimmetriatengelyei) egy olyan háromszöget alkotnak, aminek a belső szögei** $30°, 70°$ **és** $80°$**-osak. Határozd meg az** ABC **háromszög belső szögeit!**

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

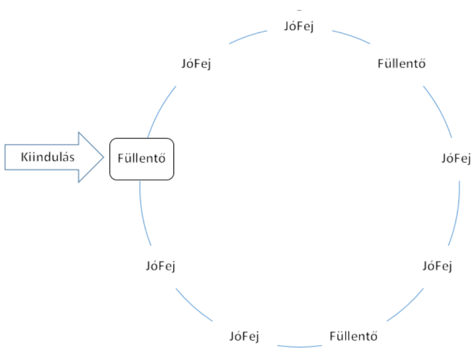
XX. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI – 7. évfolyam

1. Mihály apó puttonya mézes pogácsával van tele. Kiveszünk belőle 11-et, és ebből 9-et egy dobozba, 2-t pedig egy tálba teszünk. Újra kiveszünk 11-et, az előbbi módon elosztjuk, majd ezt addig folytatjuk, míg a puttonyban már csak 9 mézes pogácsa marad.
Ekkor a tál tartalmát kezdjük felosztani hasonlóképp: egyszerre 11-et markolunk belőle, ebből 9 egy tasakba kerül, 2 pedig egy tányérra, egészen addig míg a tányéron 66 pogácsa nem lesz, a tálban viszont csak 3 marad. Hány mézes süti volt Mihály apó puttonyában eredetileg?

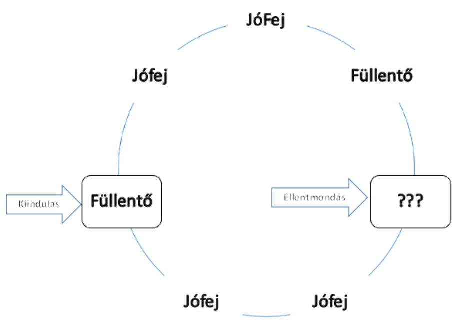
Megoldás. Mivel a tányéron 66 pogácsa van, innen tudjuk hogy 33-szor tettünk bele pogácsát. Tehát a tasakban $9 \cdot 33$, azaz 297 pogácsa van. Kiszámítható, hogy a tálban a felosztás előtt $297+66+3=366$ pogácsa volt. Mivel ide is kettesével raktuk a pogácsákat, így tudjuk, hogy 183 alkalommal nyúltunk bele a puttonyba. Tehát ott $183 \cdot 11+9=2022$ pogácsa volt eredetileg.

2. Egy nagy társaságba jófejek és füllentők jöttek össze. A jófejek mindig igazat mondanak, a füllentők viszont mindig füllentenek.
a) Egy kerek asztal köré kilencen ülnek le. Valaki megkérdezi őket, hogy milyen természetű emberek között ülnek. Mindenki ugyanazt a választ adja: „*az egyik szomszédom jófej, a másik füllentő*". Hány jófej és hány füllentő ülhet az asztalnál? Van-e többféle megoldás?
b) Mi a helyzet abban az esetben, ha egy 7 fős asztal körül kapjuk ugyanezeket a válaszokat? Ebben az esetben van-e többféle megoldás?
c) Általános esetben (tetszőleges számú személy ül az asztal körül) mi a megoldás?

Megoldás.
a) Válasszunk ki egy személyt, és tegyük fel róla, hogy ő füllentő. A szerepe miatt vagy mindkét szomszédja füllentő, vagy mindkettő jófej. Ha mindketten jófejek, az ő szomszédaik jófejek kell hogy legyenek, hisz igazat mondtak amikor azt mondták, hogy az egyik szomszédjuk füllentő, a másik jófej. Ezeknek a jófejeknek már füllentő szomszéd kell. Ezeknek a füllentőknek jófej a másik szomszédjuk is, hisz ők hazudnak. Ezzel a kör be is zárult, és megkaptuk a felső ábrán látható ülésrendet. A 9 fő között 6 jófej és 3 füllentő van.



A másik eset, hogy a kiinduló helyen ülő füllentő személy mindkét szomszédja füllentő. Ebben az esetben az ő másik szomszédaik is füllentők, és így továbbhaladva kiderül, hogy lehetséges az az eset is, amikor mind a 9 személy füllent.
b) Induljunk ki megint abból, hogy a megfigyelt személy füllentő. Az a) pont alatt leírt módon gondolkodva felsorakoztathatjuk egymás mellé a jófejeket és a füllentőket (alsó ábra), de amikor a kör bezárulna, ellentmondáshoz jutunk. A kérdőjelekkel jelölt mezőben lévő személynek a mellette ülő jófej állítása szerint füllentőnek kell lennie, míg a füllentő szomszéd állítása miatt ő egy jófej. Tehát csak abban az esetben jutunk helyes gondolatmenethez, ha az asztal körül csupa füllentő ül.



c) Általános esetben:
Akárhányan ülnek az asztal körül, mindig előfordulhat, hogy mindannyian füllentők.

Ha az asztal körül ülők száma osztható 3-mal, akkor lehetséges, hogy a kétharmaduk jófej, egyharmaduk pedig füllentő, és a felső ábrán ábrázolt helyzetben ülnek az asztal körül: minden füllentőnek két jófej szomszédja van.
Ha az asztal körül ülők száma nem osztható hárommal, csakis füllentők ülhetnek az asztal körül. Egyéb feltételezések esetén ellentmondásba ütközünk.

3. Adott az $\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)$ **kifejezés.**

Tehát, ha $n=2$**, akkor a kifejezés értéke** $\frac{3}{2}$ **lesz.**

a) Mennyi a kifejezés értéke, ha $n=5$**?**
b) Ha tudjuk, hogy a kifejezés értéke 2022, hány tényező alkotja a szorzatot?

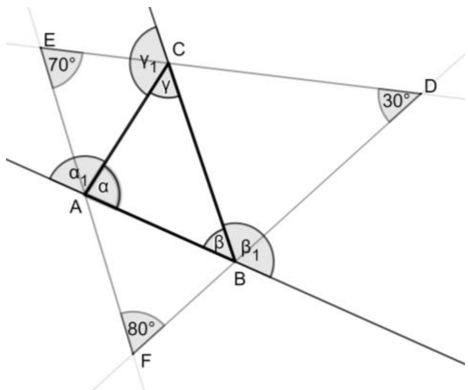
Megoldás.

a) $\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{5}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}=3$.

b) $\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)=2022$, tehát
$\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n+1}{n}=2022.$

Innen: $\frac{n+1}{2}=2022$, ahonnan $n+1=4044$. Tehát a szorzatnak $n-1$, azaz 4042 tényezője van.

4. Az ABC **háromszög külső szögfelező egyenesei (a külső szögek szimmetriatengelyei) egy olyan háromszöget alkotnak, aminek a belső szögei** $30°, 70°$ **és** $80°$ **-osak. Határozd meg az** ABC **háromszög belső szögeit!**



Megoldás. Legyenek az ABC háromszög A, B és C csúcsánál lévő belső szögei rendre α, β és γ, a nekik megfelelő külső szögek pedig α_1, β_1 és γ_1, ahogyan az ábrán is látható. Az α_1 szög felezőegyenese az EF, a β_1 szögé az FD, a γ_1 szög felezője pedig az ED egyenes.
Figyeljük meg az ACE háromszöget! Ennek a belső szögei $\frac{\alpha_1}{2}, \frac{\gamma_1}{2}$, valamint az E csúcsnál lévő $70°$-os szög.

Tehát $\frac{\alpha_1}{2}+\frac{\gamma_1}{2}+70^\circ=180^\circ$. Tudjuk, hogy a háromszög külső szöge egyenlő a vele nem szomszédos két belső szög összegével, tehát $\alpha_1=\beta+\gamma$, valamint $\gamma_1=\alpha+\beta$. Ezeket az összefüggéseket a fenti egyenletbe helyettesítve a $\frac{\beta+\gamma}{2}+\frac{\alpha+\beta}{2}=110^\circ$ egyenlethez jutunk. Rendezés után a $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}+\frac{\beta}{2}=110^\circ$ összefüggést kapjuk. Mivel $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$, így $\frac{180}{2}+\frac{\beta}{2}=110^\circ$, amiből könnyen megkapható, hogy $\frac{\beta}{2}=20^\circ$, azaz $\beta=40^\circ$. Hasonló módon számíthatjuk ki az ABF háromszögből, hogy $\gamma=20^\circ$, a BCD háromszögből pedig, hogy $\alpha=120^\circ$.