XVII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2019. december 8.

<u>10. évfolyam</u>

1. Oldd meg a $2x^2y^2 + y^2 = 6x^2 + 12$ **egyenletet az egész számok halmazán!**

2. Melyik az a négyjegyű szám, amely eleget tesz az alábbi feltételeknek:
I) Ha az első két számjegyét elhagyjuk, az eredeti szám négyzetgyökét kapjuk.
II) Ha az első két számjegyét átírjuk az utolsó kettő mögé, olyan számot kapunk, amely 1881**-gyel nagyobb az eredeti számnál.**

3. Egy egyenlőszárú háromszög köré írt kör középpontjának az alaptól mért távolsága úgy aránylik a szártól mért távolsághoz, mint $1:\sqrt{10}$**. Határozd meg az alap és a szár arányát!**

4. Adott 5 **telefonközpont. Most a kiinduláskor minden központ mindegyikkel össze van kötve és egy lépésben egy-egy kábelt el lehet venni. Az nyer, aki megszünteti a teljes kapcsolatot (ami nem csak akkor lehet, ha minden élet elvesznek!). Ki fog nyerni, a *Kezdő* vagy *Második*?**

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XVII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI – 10. évfolyam

1. Oldd meg a $2x^2y^2+y^2=6x^2+12$ **egyenletet az egész számok halmazán!**

I. Megoldás: Rendezzük a fenti egyenletet oly módon, hogy bal oldalon maradjon az y-os kifejezés, jobb oldalon pedig az x-es kifejezés. Ekkor felírhatjuk, hogy

$$y^2=\frac{6x^2+12}{2x^2+1}.$$

A jobb oldali kifejezést átalakítva adódik

$$y^2=\frac{3\left(2x^2+1\right)+9}{2x^2+1}, \qquad \text{illetve} \qquad y^2=3+\frac{9}{2x^2+1}.$$

A 9 pozitív osztói az 1, 3 és a 9. Felírhatjuk a következő táblázatot.

$2x^2+1$	1	3	9
x	0	±1	±2
y	nem egész	nem egész	±2

A táblázat alapján megállapíthatjuk, hogy négy megoldás van, és ezek: $(2;2)$, $(2;-2)$, $(-2;2)$ és $(-2;-2)$.

II. Megoldás: Rendezzük a fenti egyenletet oly módon, hogy bal oldalon maradjon az x-es kifejezés, jobb oldalon pedig az y-os kifejezés. Ekkor felírhatjuk, hogy

$$x^2=\frac{y^2-12}{2\left(3-y^2\right)}.$$

A bal oldal nemnegatív, ezért a jobb oldal is nemnegatív kell legyen. Mivel $y^2\neq3$, így $3<y^2\leq12$, ahonnan $y^2=4$ vagy $y^2=9$. Csak az első esetben lesz az x is egész, s ekkor megoldásként 4 számpár adódik ezek pedig: $(2;2)$, $(2;-2)$, $(-2;2)$ és $(-2;-2)$.

2. Melyik az a négyjegyű szám, amely eleget tesz az alábbi feltételeknek:
I) Ha az első két számjegyét elhagyjuk, az eredeti szám négyzetgyökét kapjuk.
II) Ha az első két számjegyét átírjuk az utolsó kettő mögé, olyan számot kapunk, amely 1881-gyel nagyobb az eredeti számnál.

Megoldás: Jelölje az első két számjegyből álló számot a, a második két számjegyből álló számot b, így az

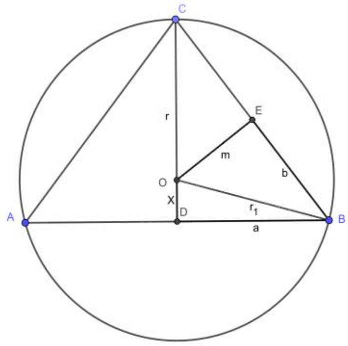
I) $100a+b=b^2$

II) $100b+a-100a-b=1881$, azaz $b-a=19$.

Ezt az első egyenletbe helyettesítve adódik az $a^2-63a+342=0$ egyenlet, amelynek megoldásai $a=6$, illetve $a=57$. A megoldások közül csak $a=57$ felel meg a feltételeknek, így $b=76$, tehát a keresett szám 5776.

3. Egy egyenlőszárú háromszög köré írt kör középpontjának az alaptól mért távolsága úgy aránylik a szártól mért távolsághoz, mint $1:\sqrt{10}$ **.**
Határozd meg az alap és a szár arányát!

Megoldás: Az ábrán látható derékszögű háromszögekre alkalmazzuk a Pitagorasz tételt.



***a*) eset** (1) $b^2+10x^2=r^2$,

(2) $a^2+x^2=r^2$,

(3) $a^2+(r+x)^2=4b^2$.

A következő ekvivalens átalakítást végezzük el: 4(1)-(2) és ezáltal kapjuk, hogy

$$4b^2-a^2=3r^2-39x^2,$$

ezután a (3) alapján

$$(r+x)^2=3r^2-39x^2,$$

ebből következik: $2r^2-2rx-40x^2=0$,

amelyet elosztunk x^2-tel és ebből adódik, hogy

$$\left(\frac{r}{x}\right)^2-\frac{r}{x}-20=0.$$

A megoldások $\frac{r}{x}=-4$, illetve $\frac{r}{x}=5$, amelyből az elsőt nem fogadhatjuk el megoldásnak.

A második alapján $r=5x$, amelyből $a=2\sqrt{6}x$, $b=\sqrt{15}x$, ahonnan a keresett arány:

$$a:b=\left(2\sqrt{10}\right):5.$$

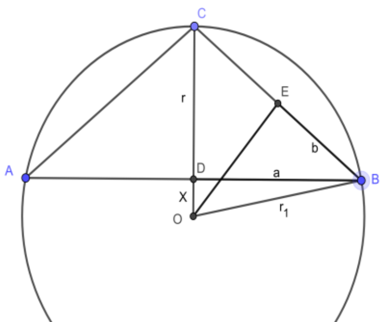
***b*) eset**

Mivel most $OE=x\sqrt{10}$, így

(1) $b^2+10x^2=r^2$,

(2) $a^2+x^2=r^2$,

(3) $a^2+(r-x)^2=4b^2$.



A következő ekvivalens átalakítást végezzük el: 4(1)-(2) és ezáltal kapjuk, hogy $4b^2-a^2=3r^2-39x^2$, ezután a (3) alapján következik, hogy $(r-x)^2=3r^2-39x^2$, majd ebből hogy $2r^2+2rx-40x^2=0$, amelyet elosztva x^2-tel adódik, hogy

$$\left(\frac{r}{x}\right)^2+\frac{r}{x}-20=0.$$

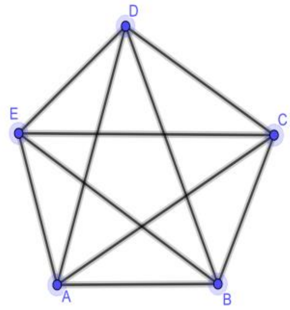
A megoldások $\frac{r}{x}=4$, illetve $\frac{r}{x}=-5$, ahol a második negatív és nem megoldás.

Az első alapján $r=4x$, amelyből $a=\sqrt{15}x$, $b=\sqrt{6}x$, ahonnan a keresett arány:

$$a:b=\left(\sqrt{10}\right):2.$$

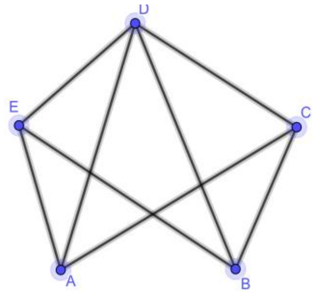
4. Adott 5 **telefonközpont. Most a kiinduláskor minden központ mindegyikkel össze van kötve és egy lépésben egy-egy kábelt el lehet venni. Az nyer, aki megszünteti a teljes kapcsolatot (ami nem csak akkor lehet, ha minden élet elvesznek!). Ki fog nyerni, a** ***Kezdő*** **vagy** ***Második*****?**

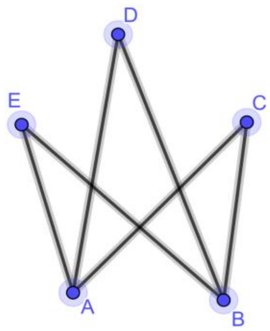
Megoldás: A *Második* tud nyerni.



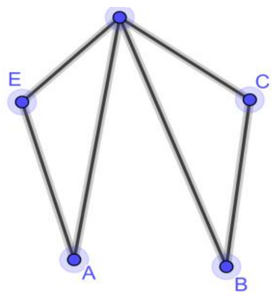
A *Kezdő* kiválaszt két tetszőleges állomást. Legyen ez az A és B, majd eltávolítja az összekötő vonalat. A *Második* kiválaszt két tetszőleges állomást pl C és E- t és az összekötő vonalat eltávolítja.

A Kezdőnek lényegében kétféle lehetősége van:





1. Eltávolítja a D-ből induló egyik élt pl DE-t.
Ekkor Második is D-ből induló élt vesz el, olyan csúcsba mutatót, amelyből E-ből nem megy él, tehát a DC-t.
Ezután *Kezdő* bármelyik élt távolítja el, lesz olyan csúcs ahova már csak egy él fut be, ezt a *Második* veszi el és nyer.



2. Ha a *Kezdő* nem D-ből induló élt vesz el, hanem ABCE négyszög valamelyik élét, pl EB-t, akkor a *Második* a másik két csúcsot osszekötő AC élt veszi el.
Most ismét az lesz a helyzet, hogy a *Kezdő* akármelyik élt távolítja el, lesz olyan csúcs, amelyikbe csak egy él fut be, ezt a *Második* veszi el és nyer.