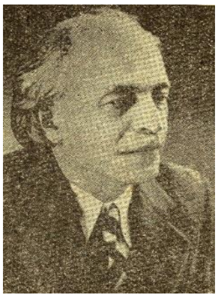


XVII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2019. december 8.

9. évfolyam

1. 2020 **ember áll egy sorban egymás mellett. Mindenki közülük vagy hazug (aki mindig hazudik), vagy lovag (aki mindig igazat mond). Mindegyik ember ezt állította: „A bal oldalamon több hazug van, mint amennyi lovag van a jobb oldalamon." Hány hazug van ebben a sorban?**

2. Melyek azok az n **és** k **pozitív egész számok, amelyekre** $n \cdot k = 10 \cdot |n-k|$**?**

3. Az $ABCD$ **derékszögű trapézban az** AB **oldal párhuzamos a** DC**-vel,** $\alpha = 90°$**,** $\beta = 60°$**, az** M **pedig a** BC **oldal felezőpontja. Tudjuk, hogy a** DC **oldal hossza egyenlő a** BC **oldal felével.**
***a*) Hány fokos szöget zár be az** AC **és a** DM **szakasz?**
***b*) Számítsd ki a** DMC **háromszög és az** $ABCD$ **trapéz területeinek arányát!**

4. A 2019 **szám olyan, hogy ha számjegyeit megkettőzve írjuk le, akkor a kapott** 22001199 **számban bármely szomszédos három számjegyet is olvassuk egybe, nem kapunk** 3**-mal osztható számot. Hány ilyen tulajdonságú négyjegyű szám létezik?**

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XVII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI – 9. évfolyam

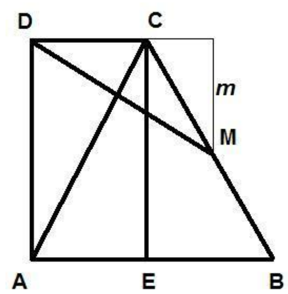
1. 2020 **ember áll egy sorban egymás mellett. Mindenki közülük vagy hazug (aki mindig hazudik), vagy lovag, (aki mindig igazat mond). Mindegyik ember ezt állította: „A bal oldalamon több hazug van, mint amennyi lovag van a jobb oldalamon.” Hány hazug van ebben a sorban?**

Megoldás: Nem lehet mindenki hazug, mert akkor a jobb szélső ember balján 2019 hazug lenne, jobbján pedig 0 lovag, és így igazat mondana, miközben ő hazug.
Nem lehet mindenki lovag sem, mert akkor mindegyik hazudna.
Beláthatjuk azt is, hogy egy lovag jobbján nem állhat hazug. Ugyanis mindkettejük balján ugyanannyi hazug áll, és jobbjukon pedig ugyanannyi lovag, így ha ugyanazt a kijelentést teszik, ugyanaz kellene hogy legyen a logikai értéke is, ami lehetetlen, mert ők különböző „kasztba” tartoznak. Ezek alapján egy lovag jobbján csak lovagok lehetnek, egy hazug balján pedig csak hazugok, így a két társaság teljesen elkülönül egymástól.
Számozzuk meg a helyeket balról. A hazugok legfeljebb az 1010. helyen állhatnak, mert ekkor minden hazugnak legfeljebb 1009 hazug lesz balra és legalább 1010 lovag jobbra, vagyis hazudni fog. Ha az 1011. helyen állna egy hazug, már igazat mondana. Hasonlóan a lovagok legalább az 1011. helyen kell, hogy álljanak ahhoz, hogy igaz legyen a kijelentésük. Vagyis fele-fele arányban vannak lovagok és hazugok, azaz 1010 hazug van a sorban.

2. Melyek azok az n **és** k **pozitív egész számok, amelyekre** $n \cdot k = 10 \cdot |n-k|$ **?**

Megoldás: Az egyenlet szimmetriája miatt ha $(n;k)$ megoldása az egyenletnek, akkor $(k;n)$ is. Így feltehetjük, hogy $n \geq k$. Ekkor az egyenlet $n \cdot k = 10 \cdot (n-k)$ alakban írható, ahonnan $n = \dfrac{10k}{10-k}$ adódik. Mivel n és k pozitív egész, ezért a nevező is pozitív, azaz $k > 0$ és $k < 10$.
A lehetséges értékeket végigpróbálgatva azt kapjuk, hogy n a $k \in \{5,6,8,9\}$ számokra ad egészet, mégpedig rendre $n=10$, $n=15$, $n=40$ és $n=90$ számokat kapjuk. A szimmetria figyelembe vételével összesen 8 megoldás van, ezek pedig:
$(5;10)$, $(6;15)$, $(8;40)$, $(9;90)$, $(90;9)$, $(40;8)$, $(15;6)$, $(10;5)$.

3. Az $ABCD$ **derékszögű trapézban az** AB **oldal párhuzamos a** DC**-vel,** $\alpha = 90°$**,** $\beta = 60°$**, az** M **pedig a** BC **oldal felezőpontja. Tudjuk, hogy a** DC **oldal hossza egyenlő a** BC **oldal felével.**
***a*) Hány fokos szöget zár be az** AC **és a** DM **szakasz?**
***b*) Számítsd ki a** DMC **háromszög és az** $ABCD$ **trapéz területeinek arányát!**



Megoldás: ***a***) Az *ABC* és a *BCD* szögek kiegészítő szögek, így a *DCM* szög $120°$-os. A feltételek szerint a *DMC* háromszög egyenlőszárú, ezért alapon fekvő szögei, az *MDC* szög és a *CMD* szög egyformán $30°$-osak. Bocsássunk merőlegest a *C* csúcsból az *AB* oldalra, és a keletkező metszéspontot az *AB* oldalon nevezzük *E* pontnak. Az *EBC* háromszög derékszögű és az *EBC* szög $60°$-os, így a másik hegyesszöge, az *ECB* szög $30°$-os. Ezen háromszögeknek ismert az a tulajdonsága, hogy $BC = 2EB$. Továbbá, az *AB* és a *CD* a feltételek szerint párhuzamosak, az *AD* és *EC* ugyanarra az *AB* oldalra merőlegesek, azaz egymással párhuzamosak, így az *AECD* négyszög téglalap, szemközti oldalai ezért egyenlők. Így $EB = BC : 2 = CM = CD = AE$. Ebből következik, hogy $AB = BC$, és mivel a két oldal $60°$-os szöget zár be, így *ABC* háromszög szabályos, tehát a *BCA* szöge $60°$-os. Az *AC* felezi az *MCD* $120°$-os szöget, így merőleges az *MCD* egyenlő szárú háromszög alapjára, tehát *MD* és *AC* $90°$-os szöget zárnak be egymással.

b) Az ábra alapján:

$$\frac{T_{DMC}}{T_{ABCD}} = \frac{\frac{DC \cdot m}{2}}{\frac{AB + CD}{2} \cdot CE} = \frac{\frac{DC \cdot m}{2}}{\frac{(2AE + AE) \cdot CE}{2}} = \frac{DC \cdot m}{3AE \cdot 2m} = \frac{DC \cdot m}{6DC \cdot m} = \frac{1}{6}.$$

4. A 2019 **szám olyan, hogy ha számjegyeit megkettőzve írjuk le, akkor a kapott** 22001199 **számban bármely szomszédos három számjegyet is olvassuk egybe, nem kapunk** 3**-mal osztható számot. Hány ilyen tulajdonságú négyjegyű szám létezik?**

Megoldás: Elegendő a 3-as szám osztási maradékainak osztályait figyelni, ezeket jelöljük **0**, **1**, **2** módon, azaz **0** $= \{0,3,6,9\}$, **1** $= \{1,4,7\}$, **2** $= \{2,5,8\}$. Ha a négyjegyű számban két azonos maradékosztálybeli szám van egymás mellett, azokból a kettőzés után négy azonos számjegy lesz egymás mellett, amelyekből hármat összeolvasva 3-mal osztható számot kapunk. Próbálgatással (például az összes eset kipróbálása után) megállapíthatjuk, hogy ha különböző maradékosztályba eső számokat írunk egymás mellé, akkor az a négyjegyű szám megfelel a feltételeknek. Ezeket kell összeszámolnunk. A következő lehetőségek vannak:

1.) **0 1 0 1**;	2.) **0 1 0 2**;	3.) **0 1 2 0**;	4.) **0 1 2 1**;
5.) **0 2 0 1**;	6.) **0 2 0 2**;	7.) **0 2 1 0**;	8.) **0 2 1 2**;
9.) **1 0 1 0**;	10.) **1 0 1 2**;	11.) **1 0 2 0**;	12.) **1 0 2 1**;
13.) **1 2 0 1**;	14.) **1 2 0 2**;	15.) **1 2 1 0**;	16.) **1 2 1 2**;
17.) **2 0 1 0**;	18.) **2 0 1 2**;	19.) **2 0 2 0**;	20.) **2 0 2 1**;
21.) **2 1 0 1**;	22.) **2 1 0 2**;	23.) **2 1 2 0**;	24.) **2 1 2 1**.

Az **1** és a **2** maradékosztály 3 elemű, így ott hármas szorzóval kell számolni. A **0** maradékosztály az első helyen 3, a többi helyen 4 lehetőséget kínál. Ezek szerint a lehetőségek száma a megszámozott esetekben így alakul:

Amikor a második, harmadik és negyedik helyen nem tartalmaz 0-t:

$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$ lehetőség a következő esetekben: 4, 8, 16, 24;

Amikor két 0-t tartalmaz, egyiket sem az első helyen:

$4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 = 144$ lehetőség a következő esetekben: 9, 11, 17, 19;

A többi esetben:

$4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 108$ lehetőség a következő esetekben:

1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 12, 13, 14, 15, 18, 20, 21, 22, 23;

Azaz az összes esetek száma: $4 \cdot 81 + 16 \cdot 108 + 4 \cdot 144 = 2628$.