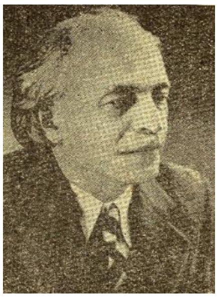


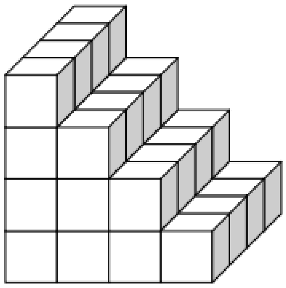
XVIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2021. január 30.

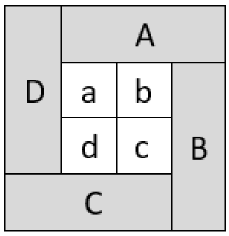
7. évfolyam

1. Az A, B, C **és** D **pontok egy egyenesen találhatóak valamilyen sorrendben.** A **és** D **pontok** 40 cm**-re vannak egymástól,** B **és** D **pedig** 20 cm**-re.** C **félúton van** A **és** B **között. Milyen távol eshet** C **a** D**-től? Vegyél figyelembe minden lehetőséget!**

2. Zoé fehér színű egységkockákból ragasztotta össze az ábrán látható lépcsőt, melynek teljes felületét pirosra festette. A festés után a lépcsőt újra kicsi kockákra szedte szét. Hány kicsi kockának lesz 6; 5; 4; 3; 2; 1 **és** 0 **pirosra festett lapja?**



3. Az ábra betűinek helyére el kell helyezni az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 **és** 8 **számjegyek mindegyikét úgy, hogy a nagybetűk helyére a velük szomszédos kis négyzetekben lévő két kisbetű helyén lévő számok összege kerüljön (Pl.** A=a+b, **vagy** B=b+c**). Mennyi lesz a nagybetűk helyén lévő számok összege? Mutasd meg, hogyan helyezted el a számjegyeket az ábrában! Írd le, hogyan gondolkodtál!**



4. A 2020**-as év leírásakor pontosan kétféle számjegyet használunk fel.**
a) Hány olyan négyjegyű szám van, ami csak a 2 **és a** 0 **számjegyekből épül fel?**
b) Hány olyan négyjegyű szám van, ami a 7 **és** 8 **számjegyekből képezhető?**
c) Hány olyan négyjegyű szám van, ami pontosan kétféle számjegyből épül fel, de nem tartalmaz 0**-t?**

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

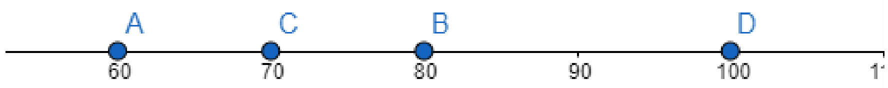
Jó munkát!

XVIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI – 7. évfolyam

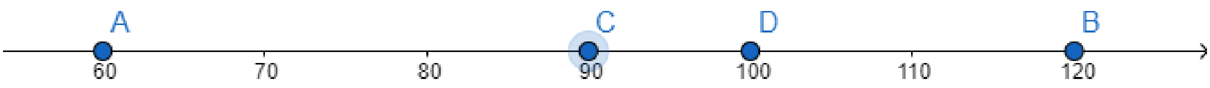
1. Az A, B, C **és** D **pontok egy egyenesen találhatóak valamilyen sorrendben.** A **és** D **pontok** 40 cm**-re vannak egymástól,** B **és** D **pedig** 20 cm**-re.** C **félúton van** A **és** B **között. Milyen távol eshet** C **a** D**-től? Vegyél figyelembe minden lehetőséget!**

Megoldás: Helyezzük el az A, B, C, D pontokat a számtengelyen (legyen az egység 1 cm). Legyen A az $x = 60$ pontban. A következő lehetséges elrendezéseket kapjuk a D pont elhelyezése után:
I. Ha a D-t az A-tól jobbra vesszük fel, a B pont elhelyezése után a következő elrendezések jönnek létre

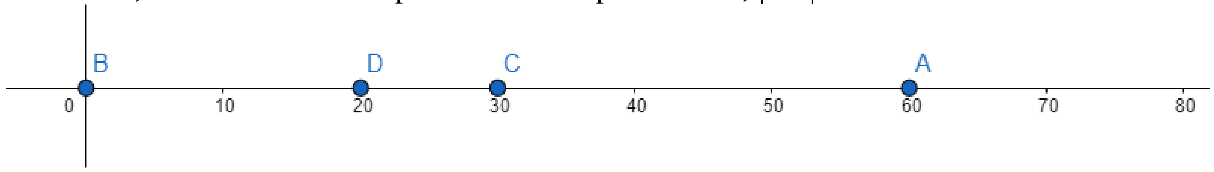
A-B-D esetén, az ábra szerint a C pont az $x = 70$ pontba esik, |CD|=30 cm.



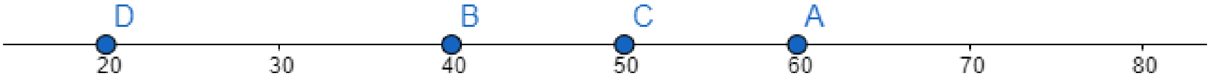
A-D-B esetén, az ábra szerint a C pont az $x = 90$ pontba esik, |CD|=10 cm.



II. Ha D-t az A-tól balra vesszük fel, a következő elrendezések lehetségesek:
B-D-A esetén, az ábra szerint a C pont az $x = 30$ pontba esik, |CD|=10 cm.



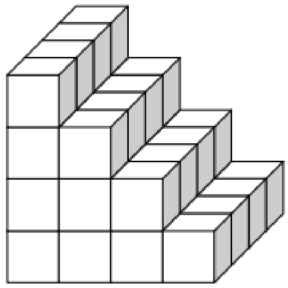
D-B-A esetén, az ábra szerint a C pont az $x = 50$ pontba esik, |CD|=30 cm.



Tehát a C és D távolsága lehet 10 cm és 30 cm is.
A maximum pontszám megadható akkor is, ha a tanuló csak az I. alatti eseteket részletezi, majd analógiára hivatkozva kifejti, hogy az A és D fordított elrendezése esetén is ugyanezek a távolságok számíthatók ki.

2. Zoé fehér színű egységkockákból ragasztotta össze az ábrán látható lépcsőt, melynek teljes felületét pirosra festette. A festés után a lépcsőt újra kicsi kockákra szedte szét. Hány kicsi kockának lesz 6; 5; 4; 3; 2; 1 **és** 0 **pirosra festett lapja?**

Megoldás:
Ha fentről lefelé, balról jobbra haladunk, az első és az utolsó (szélső) lépcsősorban a következő piros oldalszámok fordulnak elő:

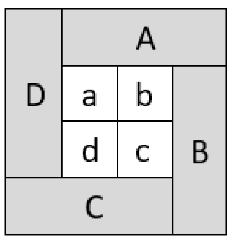


4
2 3
2 1 3
3 2 2 4

A második és harmadik lépcsősor, amik "belül" vannak eggyel kevesebb festett oldallal rendelkezik, mint a "szélsők", azaz
3
1 2
1 0 2
2 1 1 3

Összesen 4x10=40 db kocka van a lépcsőben. Ezek közül
0 piros oldalú 0+1+1+0=2 kocka
1 piros oldalú 1+4+4+1=10 kocka
2 piros oldalú 4+3+3+4=14 kocka
3 piros oldalú 3+2+2+3=10 kocka
4 piros oldalú 2+0+0+2=4 kocka
5 piros oldalú 0 kocka
6 piros oldalú 0 kocka

3. Az ábra betűinek helyére el kell helyezni az 1**,** 2**,** 3**,** 4**,** 5**,** 6**,** 7 **és** 8 **számjegyek mindegyikét úgy, hogy a nagybetűk helyére a velük szomszédos kis négyzetekben lévő két kisbetű helyén lévő számok összege kerüljön (Pl.** A=a+b**, vagy** B=b+c**). Mennyi lesz a nagybetűk helyén lévő számok összege? Mutasd meg, hogyan helyezted el a számjegyeket az ábrában! Írd le, hogyan gondolkodtál!**



Megoldás: A megadott 8 számjegy összege 36. Mivel a-t beszámítjuk A-hoz és D-hez is, ezért kimondhatjuk, hogy a nagybetűkkel jelölt mezőkben a számok összege kétszer nagyobb a kisbetűkkel jelölt számok összegénél. Tehát, ha x=a+b+c+d, akkor A+B+C+D=2x. Azaz a négyzetben lévő teljes összeg x+2x=3x. Tudjuk, hogy 3x=36, innen x=12.
Tehát a kisbetűkhöz úgy kell számokat hozzárendelni, hogy a+b+c+d=12 legyen. Az biztos, hogy 1 és 2 nem kerülhetnek kívülre, mivel nem tudjuk megkapni őket a felsorolt számjegyekből vett összegként.
Tehát 1 és 2 biztosan a belső négyzetbe kerül. Az ő összegük 3, ezért a következő két számjegyet úgy kell ide választani, hogy az összegük 9 legyen. Ez két módon lehetséges 3+6=9 vagy 4+5=9.
Vizsgáljuk meg a 1, 2, 3, 6 esetet! A 3 és a 6 nem kerülhet egymás mellé mert az összegük 9, így az egyik lehetséges megoldás: a=1, b=3, c=2, d=6, A=4, B=5, C=8 és D=7. Minden számjegy csak egyszer szerepel, ezek szerint jól dolgoztunk.

Ha a belső négyzetbe az 1,2,4,5 számjegyeket tesszük, akkor 1 és 2 egymás melletti mezőbe kell, hogy kerüljön, mert csak így kaphatunk 3-at összegként. A 4 és 5 viszont nem kerülhet egymás mellé, mert az összegük 9, azt pedig nem szabad megkapni. Így ellentmondáshoz jutunk, mert nincs a számjegyeknek olyan elrendezése, ami ennek a két feltételnek megfelel.

4. A 2020**-as év leírásakor pontosan kétféle számjegyet használunk fel.**
a) Hány olyan négyjegyű szám van, ami csak a 2 **és a** 0 **számjegyekből épül fel?**
b) Hány olyan négyjegyű szám van, ami a 7 **és** 8 **számjegyekből képezhető?**
c) Hány olyan négyjegyű szám van, ami pontosan kétféle számjegyből épül fel, de nem tartalmaz 0**-t?**

Megoldás:
a) Az első számjegy csakis 2 lehet. A 2., 3., 4. számjegyet kétféleképpen választhatjuk, ezért $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ féle szám felel meg a feltételnek. Ebbe viszont beletartozik a 2222 is, amiben nincs 0, ezért a megoldás 7.
(Helyes megoldások: 2000, 2002, 2020, 2022, 2200, 2202, 2220)
b) Két különböző számjegyet felhasználva mindegyik helyi értékre kétféle számjegy közül választhatunk, ami azt jelenti, hogy az adott számpárból $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ féle számjegy állítható elő. Viszont ezek között van 2 olyan, ami csak egyféle számjegyet tartalmaz (7777 és 8888), ezek nem felelnek meg, így ezekből a számjegyekből 14 féle négyjegyű szám képezhető, amiben pontosan kétféle számjegy van.
c) Az a kérdés, hogy a kétféle számjegyet hányféleképpen választhatjuk ki. A 9 rendelkezésre álló számjegy közül kettő kiválasztható $\frac{9 \cdot 8}{2} = 36$ módon, mert a számpár első tagját 9 közül választhatjuk, a másodikat már csak 8 közül. Mivel minden számpárt duplán számoltunk (pl. a 7-8-at is és a 8-7-et is), ezért kell kettővel elosztanunk, hogy megkapjuk a különböző számpárok számát.
Tehát a végeredmény $36 \cdot 14 = 504$.