XIX. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2021. december 3.

<u>10. évfolyam</u>

1. Hány olyan pozitív egész szám van, amelyre igaz, hogy a számjegyeinek összege és szorzata is egyaránt 24**?**

2. Határozd meg az összes olyan x, y **pozitív egész számot, amelyekre** $5^x - 3^y = 16$**.**

3. Egy négyzetet az oldalaival párhuzamos egyenesekkel téglalapokra osztottunk. Ezeket a téglalapokat sakktáblaszerűen feketére és fehérre színeztünk. Kiderült, hogy a fekete téglalapok összterülete megegyezik a fehér téglalapokéval. Bizonyítsd be, hogy a fekete téglalapok átrendezhetők úgy, hogy együtt egy téglalapot alkossanak!

4. Adottak a síkban az ABC **és** ACO **szabályos háromszögek. Tekintsük azt az** O **középpontú kört, amely áthalad az** A **és** C **pontokon. Bizonyítsd be, hogy e kör bármely** M **pontjára érvényes a következő összefüggés:** $MA^2 + MC^2 = MB^2$ **.**

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XIX. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI – 10. évfolyam

1. Hány olyan pozitív egész szám van, amelyre igaz, hogy a számjegyeinek összege és szorzata is egyaránt 24?

Megoldás: A keresett számokban előforduló számjegyek lehetséges értéke $1,2,3,4,6,8$ a szorzatra vonatkozó feltétel alapján. A számjegyek nem növekvő sorrendben a következők lehetnek az össszegre adott feltétel alapján:

$8,3$ és 13 db 1-es,
$6,4$ és 14 db 1-es,
$6,2,2$ és 14 db 1-es,
$4,3,2$ és 15 db 1-es,
$3,2,2,2$ és 15 db 1-es,

Az öt lehetséges esetben a megoldások száma rendre $\frac{15!}{13!}, \frac{16!}{14!}, \frac{17!}{2!\cdot 14!}, \frac{18!}{15!}, \frac{19!}{15!\cdot 3!}$

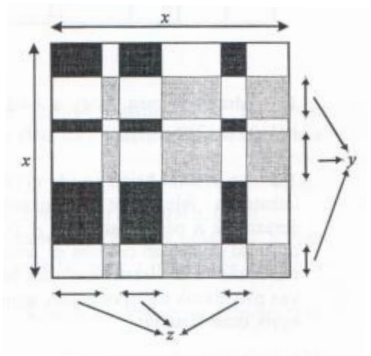
Összesen tehát $15\cdot 14+16\cdot 15+17\cdot 8\cdot 15+18\cdot 17\cdot 16+19\cdot 17\cdot 16\cdot 3=22890$ szám van.

2. Határozd meg az összes olyan x, y pozitív egész számot, amelyekre $5^x - 3^y = 16$.

Megoldás: Az egyenletet 4-es modulus szerint vizsgálva látjuk, hogy y páros, 3-as modulus szerint vizsgálva pedig x páros volta derül ki. Legyen $x = 2m$, $y = 2n$, és alakítsuk szorzattá: $5^{2m} - 3^{2n} = \left(5^m + 3^n\right)\left(5^m - 3^n\right) = 16$. Mivel az első szorzótényező pozitív egész, a második is pozitív és egyik sem nagyobb 16-nál. Ezért csak $m=1$ lehetséges, így $n=1$ azonnal adódik. Az egyenletnek tehát egyetlen megoldása van, az $(x, y) = (2,2)$.

3. Egy négyzetet az oldalaival párhuzamos egyenesekkel téglalapokra osztottunk. Ezeket a téglalapokat sakktáblaszerűen feketére és fehérre színeztünk. Kiderült, hogy a fekete téglalapok összterülete megegyezik a fehér téglalapokéval. Bizonyítsd be, hogy a fekete téglalapok átrendezhetők úgy, hogy együtt egy téglalapot alkossanak!

Megoldás: Legyen a négyzet oldalának hossza x. Adjuk össze minden második vízszintes sáv szélességét és minden páratlanadik függőleges sáv szélességét. Ha az így kapott értékek y, illetve z akkor a sötét részek összterülete $\frac{x^2}{2} = y(x-z)+(x-y)z$. Rendezés és szorzattá alakítás után az $(x-2y)(x-2z)=0$ egyenlethez jutunk. Tehát y és z közül legalább az egyik $\frac{x}{2}$-vel egyenlő. Innen már egyszerűen adódik a feladat állítása, mert területének fel sötét a másik fele világos téglalap.



4. Adottak a síkban az ABC és ACO szabályos háromszögek. Tekintsük azt az O középpontú kört, amely áthalad az A és C pontokon. Bizonyítsd be, hogy e kör bármely M pontjára érvényes a következő összefüggés: $MA^2 + MC^2 = MB^2$.

Megoldás: Forgassuk el az M pont körül $-60°$-kal az ABC háromszöget, illetve a B körül $60°$-kal C-t. A pontok képei legyenek A_1, B_1, C_1 illetve X. Az A_1B_1B és BCM háromszögek egybevágóak, mert midketten egybevágóak az XBB_1 háromszöggel. Az előbbit B_1B felezőpontja körül kell $180°$-kal, az utóbbit B körül kell $60°$-kal elforgatni, hogy XBB_1-be jusson. Ezért $A_1B = MC$. Az A_1AB és MAC háromszögek egybevágóak, hiszen az A pont körül egymásba forgathatóak. A kerületi szögek tétele alapján $AMC\sphericalangle = 30°$ így $AA_1B\sphericalangle = 30°$. De AA_1M szabályos háromszög, így MA_1B derékszögű háromszög, amelyre Pitagorasz-tételt alkalmazva megkapjuk, hogy $MA^2 + MC^2 = MB^2$, mivel $MA_1 = MA$ és $A_1B = MC$.