XXI. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2023. december 2.

10. évfolyam

1. Melyik az a háromjegyű szám, amelynek a középső számjegye a másik két számjegy számtani közepe, és ha a számhoz 990-et adunk, akkor a kapott szám számjegyei közül a második és az első jegy hányadosa egyenlő a harmadik és a második jegy hányadosával?

2. Oldd meg az egész számok halmazán az alábbi egyenletet:

$$x+y=x^2-xy+y^2.$$

3. Egy $24\,cm^2$ területű konvex négyszöget az átlói négy olyan háromszögre bontanak, amelyek közül két szomszédosnak a területe $3\,cm^2$ és $5\,cm^2$. Mekkora a másik két háromszög területe?

4. Bizonyítsd be, hogy $2023\cdot 2025^3-2024\cdot 2022^3$ egy egész szám köbe. Melyik ez az egész szám? Általánosíts!

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XXI. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI – 10. évfolyam

1. Melyik az a háromjegyű szám, amelynek a középső számjegye a másik két számjegy számtani közepe, és ha a számhoz 990-et adunk, akkor a kapott szám számjegyei közül a második és az első jegy hányadosa egyenlő a harmadik és a második jegy hányadosával?

Megoldás. Ha háromjegyű szám az $\overline{abc}$, akkor egyrészt $2b=a+c$, másrészt pedig mivel $990=1000-10$ felírhatjuk a következőt: $100a+10b+c+990=1000+100a+10(b-1)+c$, tehát $\overline{abc}+990=\overline{1a(b-1)c}$, és a feltételek szerint $\frac{a}{1}=\frac{b-1}{a}$, azaz $a^2=b-1$. Mivel b számjegy és $b-1$ nullától különböző négyzetszám, ezért két lehetőség van: $b=2$ és $b=5$. Ezekből következik, hogy a feladatnak két megoldása, a 123 és a 258.

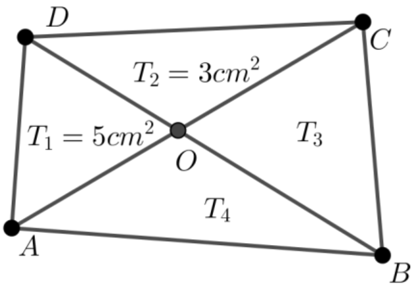
2. Oldd meg az egész számok halmazán az alábbi egyenletet:

$$x+y=x^2-xy+y^2.$$

Megoldás. Ha van az egyenletet kielégítő x és y érték, akkor az egyenlet x paraméterrel y ismeretlenre megoldható, tehát a diszkrimináns nem lehet negatív. Az egyenlet diszkriminánsa $D=-3x^2+6x+1$, amely csak akkor nemnegatív, ha $x\in\left[1-\frac{2\sqrt{3}}{3},1+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$. Ebből az x lehetséges értékei 0, 1 és 2 tehát a megoldások:

$$(x,y)\in\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,2),(2,1),(2,2)\}.$$

3. Egy $24\,cm^2$ területű konvex négyszöget az átlói négy olyan háromszögre bontanak, amelyek közül két szomszédosnak a területe $3\,cm^2$ és $5\,cm^2$. Mekkora a másik két háromszög területe?



Megoldás. Legyen az $ABCD$ konvex négyszög átlóinak metszéspontja O, területe $T=24\,cm^2$, valamint legyen az ábra jelölései alapján $T_1=5\,cm^2$ és $T_2=3\,cm^2$, a keresett másik két háromszög területe pedig T_3 és T_4. Az állításból következik, hogy $T_3+T_4=T-(T_1+T_2)=16\,cm^2$, valamint teljesül a következő arány is: $\frac{T_1}{T_2}=\frac{AO}{OC}=\frac{T_4}{T_3}$, hiszen a háromszögekben a magasságok páronként egyenlőek. A területekre így a következő egyenleteket kapjuk $T_3+T_4=16\,cm^2$ és $\frac{T_4}{T_3}=\frac{5}{3}$, amelyből könnyen kiszámítható, hogy $T_3=6\,cm^2$ és $T_4=10\,cm^2$.

4. Bizonyítsd be, hogy $2023\cdot 2025^3-2024\cdot 2022^3$ **egy egész szám köbe. Melyik ez az egész szám? Általánosíts!**

Megoldás. Általánosítva $n\cdot(n+2)^3-(n+1)(n-1)^3=8n^3+12n^2+6n+1=(2n+1)^3$. Ha $n=2023$, akkor a keresett szám szám a $2\cdot 2023+1=4047$.