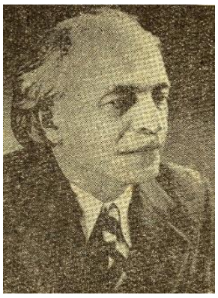


XIX. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2021. december 4.

7. évfolyam

1. Egy 3×3-as négyzet alakú táblázat mindegyik mezőjébe -2 vagy 1 értéket írtak. Ezután összeadták soronként is, oszloponként is a számokat. Igazold, hogy az így kapott 6 szám között biztosan van legalább két egyenlő!

2. Az ABC háromszög C csúcsnál lévő szöge $45°$-os. Jelöld H-val a háromszög magasságpontját! Bizonyítsd be, hogy a $CH = AB$ egyenlőség teljesül!

3. Egy számsorozat első és második eleme is 1-gyel egyenlő. A második elemtől kezdve a sorozat bármely eleme két szomszédjának szorzatánál 1-gyel kisebb. Mennyi a sorozat első 2021 elemének összege?

4. Adott egy $13\,\mathrm{cm}$ oldalhosszúságú négyzet. Ezt a négyzetet kell letakarni 5 db téglalappal, amelyek:
a) oldalainak hossza cm-ben mérve egész szám;
b) az oldalhosszak között $1\,\mathrm{cm}$ és $10\,\mathrm{cm}$ között minden lehetséges hossz pontosan egyszer szerepel;
c) a téglalapok nem lóghatnak le a négyzetről és részlegesen sem fedhetik egymást.
Ábrázold a megoldást!

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XIX. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI – 7. évfolyam

1. Egy 3×3-as négyzet alakú táblázat mindegyik mezőjébe -2 vagy 1 értéket írtak. Ezután összeadták soronként is, oszloponként is a számokat. Igazold, hogy az így kapott 6 szám között biztosan van legalább két egyenlő!

Megoldás: Soronként és oszloponként is 3-3 szám kerül a táblázatba. Az összeg szempontjából a sorrend lényegtelen, ezért négyféle elrendezés lehetséges:

a) nincs egyes: ebben az esetben az összeg $-2+(-2)+(-2)=-6$;

b) 1 db egyes van: $1+(-2)+(-2)=-3$;

c) 2 db egyes van: $1+1+(-2)=0$;

d) 3 db egyes van: $1+1+1=3$.

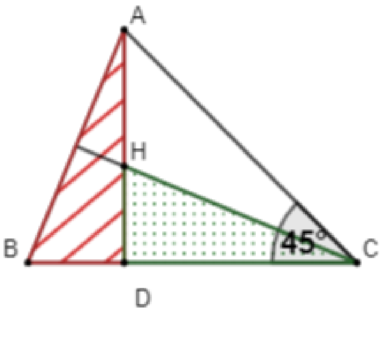
Mivel csak 4 különböző eredmény kapható, biztosan lesz az eredmények között olyan, ami ismétlődik (skatulyaelv).

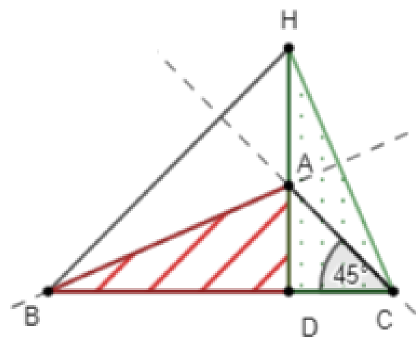
2. Az ABC háromszög C csúcsnál lévő szöge $45°$-os. Jelöld H-val a háromszög magasságpontját! Bizonyítsd be, hogy a $CH = AB$ egyenlőség teljesül!

Megoldás: *I. eset, ha ABC hegyesszögű háromszög.* Nevezzük D-nek az A csúcsból a BC oldal egyenesére bocsátott magasságvonal talppontját. Az ACD háromszög egyenlőszárú derékszögű háromszög, mivel az egyik hegyesszöge $45°$-os. Kimondhatjuk, hogy $CD = AD$.

Figyeljük meg a CDH és az ADB háromszögeket. Mindkét háromszögnek van egy derékszöge, az egyik befogójuk egybevágó ($CD = AD$), valamint az egybevágó befogóhoz tartozó hegyesszögeik merőleges szárú szögek, tehát egyenlőek. Így a SzOSz tétel alapján kimondható, hogy a két háromszög egybevágó. Ebből következik, hogy az átfogóik is egybevágóak, azaz $CH = AB$. (bal oldali ábra)

II. eset, ha ABC tompaszögű háromszög. A jobb oldali ábrán látható, hogy az *I. esetben* leírt érvelés itt is megállja a helyét.



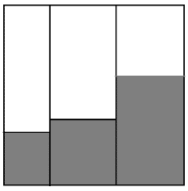


3. Egy számsorozat első és második eleme is 1-gyel egyenlő. A második elemtől kezdve a sorozat bármely eleme két szomszédjának szorzatánál 1-gyel kisebb. Mennyi a sorozat első 2021 elemének összege?

Megoldás: A sorozat első néhány eleme: 1, 1, 2, 3, 2, 1, 1, 2, 3, 2, 1,1 ,...
Látható, hogy a számok ötösével ismétlődnek. Az első 2021 elem 404 ilyen ciklusból és még egy egyesből áll. Az ötös ciklus elemeinek összege 9, ezért az első 2021 elem összege $S = 404\cdot9+1=3637$.

4. Adott egy $13\,\mathrm{cm}$ oldalhosszúságú négyzet. Ezt a négyzetet kell letakarni 5 db téglalappal, amelyek:
a) oldalainak hossza cm-ben mérve egész szám;
b) az oldalhosszak között $1\,\mathrm{cm}$ és $10\,\mathrm{cm}$ között minden lehetséges hossz pontosan egyszer szerepel;
c) a téglalapok nem lóghatnak le a négyzetről és részlegesen sem fedhetik egymást.
Ábrázold a megoldást!

Megoldás: Vegyük észre, hogy az 5 téglalaphoz pontosan 10 mérőszámot kaptunk, tehát a téglalapoknak nincs olyan téglalap-páros, aminek lenne megegyező hosszúságú oldala.



Abban ez esetben ha a négyzet egyik oldalára 3 féle téglalapot is illesztenénk, olyan helyzet állna elő, ami nem fedhető le a maradék két téglalappal (lásd a jobb oldali ábrán).

Tehát gyorsan rájövünk, a négyzet minden oldalán 2-2 téglalap elemeit látjuk, így az ötödik téglalap valahol a négyzet belsejében foglal majd helyet. A 13 két (1-10-ig terjedő) szám összegeként a következő módokon írható fel: $10+3$, $9+4$, $8+5$ és $7+6$. Látható, hogy így a kimaradó 1 és 2 cm hosszú oldalak alkotják a középen lévő téglalapot. Hogy ez elférjen odabenn, a $10+3$ módon felosztott oldallal szemben a $9+4$ szerepeljen (1 az eltérés a hosszok között). A másik két páros: $8+5$ és $7+6$ szintén egymással szemben helyezhető el mivel $7-5=2$, ami a középső téglalap hosszabb oldalát alkotja.

Két lehetséges megoldás létezik: