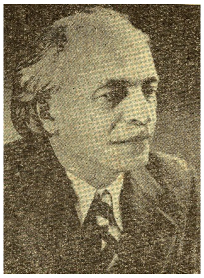


XIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2015. december 5.

10. évfolyam

1. Oldd meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletrendszert:

$$x^2 - y^2 = 2(x+y),$$
$$x^2 + y^2 = 5(x-y).$$

2. Van-e olyan számrendszer, amelyben az 572 **alakú szám osztható a** 275 **alakú számmal?**

3. Az $ABCD$ **paralelogramma** AB **oldalának** A **-hoz közelebbi harmadoló pontja** H**, a** BC **oldalának felezőpontja** F **és** DA **oldalának** A **-hoz legközelebb levő negyedelő pontja** G**. Bizonyítsd be, hogy** FG**,** CH **és** DB **egyenesek egy ponton mennek át!**

4. Hány olyan konvex (domború) sokszög van amelynek három egymást követő csúcsa $A(5;0)$**,** $B(5;5)$ **és** $C(0;5)$ **koordinátájú pont, a többi csúcsának koordinátái pedig szintén nem negatív egész számok?**

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

MEGOLDÁSOK – <u>10. évfolyam</u>

1. **Oldd meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletrendszert:**

$$x^2 - y^2 = 2(x+y),$$
$$x^2 + y^2 = 5(x-y).$$

Megoldás: Az első egyenlet bal oldalát tényezőre bontjuk, mint $(x-y)(x+y)=2(x+y)$, majd átrendezéssel tényezőkre bontjuk: $(x+y)(x-y-2)=0$. **(5 pont)**
A szorzat nulla, ha legalább az egyik tényezője nulla, így két lehetőségünk van.
I. Ha $x+y=0$, akkor ebből x-et behelyettesítve a második egyenletbe kapjuk, hogy $2y^2=-10y$. Átrendezéssel adódik, hogy $y(y+5)=0$, amelyből $y_1=0$, illetve $y_2=-5$. Ennek megfelelően kapjuk meg, hogy $x_1=0$, illetve $x_2=5$. **(10 pont)**
II. Ha $x-y-2=0$, akkor ebből x-et behelyettesítve a második egyenletbe kapjuk, hogy $2y^2+4y-6=0$, amelyből $y_3=1$, illetve $y_4=-3$. Ennek megfelelően kapjuk meg, hogy $x_3=3$, illetve $x_4=-1$. Az egyenletrendszer megoldáshalmaza: **(10 pont)**

$$M=\{(0;0),(5;-5),(3;1),(-1;-3)\}.$$

2. Van-e olyan számrendszer, amelyben az 572 **alakú szám osztható a** 275 **alakú számmal?**

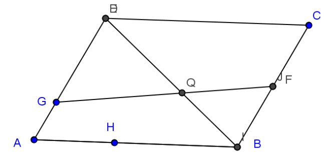
Megoldás: Tegyük fel, hogy van ilyen számrendszer, s ennek x alapszáma 1-nél nagyobb egész szám. Az oszthatóság pontosan akkor teljesül, ha az osztandó és osztó hányadosa egész szám, azaz ha **(5 pont)**

$$\frac{5x^2+7x+2}{2x^2+7x+5}=\frac{(5x+2)(x+1)}{(2x+5)(x+1)}=\frac{5x+2}{2x+5}=\frac{2(2x+5)+x-8}{2x+5}=2+\frac{x-8}{2x+5}.$$ **(10 pont)**

Vizsgáljuk most meg az $\frac{x-8}{2x+5}<1$ egyenlőséget. Mivel $2x+5>0$, ezért $x-8<2x+5$, azaz $x>-13$, így az egyenlőtlenség minden 1-nél nagyobb egész szám esetén teljesül.
A törtrész csak akkor nulla, ha a számláló nulla, azaz ha $x=8$. **(10 pont)**
Ebből következik, hogy az oszthatóság csak a 8-as számrendszerben teljesül.

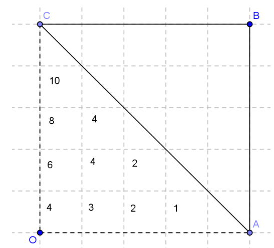
3. Az $ABCD$ paralelogramma AB oldalának A-hoz közelebbi harmadoló pontja H, a BC oldalának felezőpontja F és DA oldalának A-hoz legközelebb levő negyedelő pontja G. Bizonyítsd be, hogy FG, CH és DB egyenesek egy ponton mennek át!

Megoldás: Megmutatjuk, hogy GF és CH ugyanabban a pontban metszik a DB átlót. Jelölje P a CH és DB metszéspontját, Q pedig a GF és DB metszéspontját.
A HBP és a CDP háromszögek hasonlók, mert a szögeik egyenlők. A hasonlóság miatt $BP:PD=BH:DC=2:3$.
A FQB és a GQD háromszögek hasonlók, mert a szögeik egyenlők. A hasonlóság miatt $BQ:QD=BF:DG=2:3$.
Azt kapjuk, hogy $BP:PD=2:3=BQ:QD$, ez csak akkor lehetséges ha P és Q egybeesik. Tehát FG, CH és DB egy ponton mennek át. **(25 pont)**

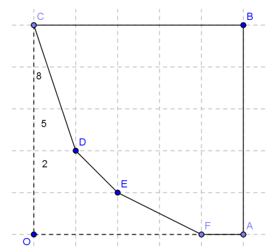


4. Hány olyan konvex (domború) sokszög van amelynek három egymást követő csúcsa $A(5;0)$, $B(5;5)$ és $C(0;5)$ koordinátájú pont, a többi csúcsának koordinátái pedig szintén nem negatív egész számok?

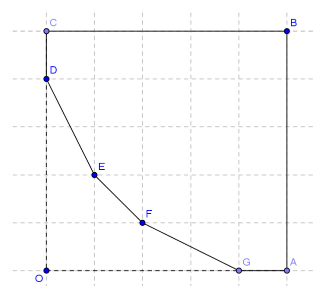
Megoldás: Háromszög 1 van. **(5 pont)**
Négyszög negyedik csúcsa olyan rácspont lehet, amely az ACO háromszög belsejében vagy az AO illetve CO oldalon van. Az ilyen pontok száma 15, így ennyi négyszög van.
Ötszögnél a negyedik D csúcs helyét rögzítsük először, az ötödik csúcs lehetséges helyzeteinek számát D helyének megfelelően rácspontra írjuk. Például, $D(3,1)$ pont után csak a $E(4,0)$ ponttal kapunk konvex ötszöget, ezért E-hez 1-et írunk. **(5 pont)**
Összesen $10+8+4+6+4+2+4+3+2+1=44$ ötszög lehetséges. **(5 pont)**



Hasonló módon számolhatjuk össze a hatszögeket, amelyekből $8+5+2+1=16$ van.
(5 pont)



Hétszög pedig csak 1 van.



Több csúcsú sokszög nem lehetséges, mert akkor az A, B és C csúcsokon kívül legalább 5 csúcsból vagy legalább 2-nek megegyezik az első vagy második koordinátája és így a sokszög konkáv vagy három csúcs egy egyenesre esik.
Így az összes lehetséges sokszög száma: $1+15+44+16+1=77$. **(5 pont)**