XVII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2019. december 8.

12. évfolyam

1. Hányféleképpen állíthatjuk elő a 10**-es számot az** 1**,** 2**,** 3 **és** 4 **számok összegeként, ha számít az összeadandók sorrendje? (Például a** 3**-as számot négyféleképp állíthatjuk elő:** $3=1+1+1=1+2=2+1=3$**.)**

2. Határozd meg az összes olyan $f:R\to R$ **függvényt, amely kielégíti a következő függvényegyenletet:**

$$f(x+2y)-f(x-y)=3y(2x+y).$$

3. A konvex $ABCD$ **négyszög átlói a** P **pontban metszik egymást és négy háromszögre bontják a négyszöget. Bizonyítsd be, hogy ezen háromszögeknek a súlypontjai egy paralelogrammát határoznak meg!**

4. Oldd meg a $2\cdot 3^x=5^y+1$ **egyenletet a természetes számok halmazában!**

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XVII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI – 12. évfolyam

1. Hányféleképpen állíthatjuk elő a 10-es számot az 1, 2, 3 és 4 számok összegeként, ha számít az összeadandók sorrendje? (Például a 3-as számot négyféleképp állíthatjuk elő: $3=1+1+1=1+2=2+1=3$.)

Megoldás: Jelöljük f_n-nel azt, hogy az n számot hányféleképp írhatjuk fel az 1,2,3 és 4 számok összegeként. Ebben az összegben az első összeadandó négyféle lehet: 1, 2, 3, 4. Ha az első összeadandó i, $i \in \{1,2,3,4\}$, a maradék $n-i$ összeget f_{n-i}-féleképp állíthatjuk elő. Tehát $f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + f_{n-3} + f_{n-4}$. Könnyen belátható, hogy $f_1 = 1$, $f_2 = 2$, $f_3 = 4$ valamint $f_4 = 8$ (4=1+1+1+1=1+1+2=1+2+1=2+1+1=2+2=1+3=3+1=4). Innen pedig egyszerű számolással adódik, hogy $f_5 =$ 1+2+4+8=15, $f_6 =$ 2+4+8+15=29, $f_7 =$ 4+8+15+29=56, $f_8 =$ 8+15+29+56=108, $f_9 =$ 15+29+56+108=208 és végezetül $f_{10} =$ 29+56+108+208=401.

2. Határozd meg az összes olyan $f : R \to R$ függvényt, amely kielégíti a következő függvényegyenletet:

$$f(x+2y) - f(x-y) = 3y(2x+y).$$

Megoldás: Az $x = y = \frac{z}{3}$ helyettesítéssel az $f(z) - f(0) = z^2$ eredményhez jutunk, ahonnan $f(x) = x^2 + c$ az egyedüli lehetséges megoldás. Egyszerű visszahelyettesítéssel adódik, hogy ez a függvénycsalád valóban megoldás.

3. A konvex $ABCD$ négyszög átlói a P pontban metszik egymást és négy háromszögre bontják a négyszöget. Bizonyítsd be, hogy ezen háromszögeknek a súlypontjai egy paralelogrammát határoznak meg!

Megoldás: Legyenek T_1, T_2, T_3 és T_4 pontok, rendre, az ABP, BCP, CDP és DAP háromszögek súlypontjai, az S_1, S_2, S_3 és S_4 pontok pedig, rendre, az AB, BC, CD és DA oldalak felezőpontjai. Könnyen belátható, hogy az $S_1S_2S_3S_4$ négyszög paralelogramma: Mivel az S_1S_2 az ABC háromszög középvonala, ezért párhuzamos az AC átlóval. Ugyanígy az S_3S_4 is az ACD háromszög középvonala, tehát ő is párhuzamos az AC átlóval. Vagyis az $S_1S_2S_3S_4$ négyszög két szemköztes oldala párhuzamos egymással. Hasonlóan belátható a másik két szemköztes oldal párhuzamossága is, amiből következik, hogy az $S_1S_2S_3S_4$ négyszög valóban paralelogramma. Tekintsük most a P középponttú és $\frac{2}{3}$ együtthatójú homotéciát. Mivel a súlypont a súlyvonalat 2:1 arányban osztja, így ez a homotécia az S_i pontot pontosan a T_i pontra, $i \in \{1,2,3,4\}$, képezi le, amiből következik, hogy a $T_1T_2T_3T_4$ négyszög is paralelogramma.

4. Oldd meg a $2 \cdot 3^x = 5^y + 1$ egyenletet a természetes számok halmazában!

Megoldás: Nyilvánvaló, hogy az $(x, y) = (1,1)$ megoldása az egyenletnek. Bebizonyítjuk, hogy nem létezik más megoldás. Tegyük fel, hogy $x \geq 2$. Ekkor az egyenlet bal oldala osztható 9-cel. Mivel az 5 hatványainak 9-cel való osztási maradékai hatos ciklusban ismétlődnek: 5,7,8,4,2,1, és ebben a ciklusban a 8-as a harmadik szám, megállapíthatjuk, hogy $y = 6k + 3$ alakú. Így az egyenlet jobb oldala felírható: $5^y + 1 = 5^{6k+3} + 1 = \left(5^6\right)^k \cdot 5^3 + 1$. Mivel a kis Fermat-tétel miatt 5^6 7-es modulus szerint 1-gyel egyenlő, így az egész jobb oldal 7-es modulus szerint $5^3 + 1 = 125 + 1 = 126$-tal egyenlő, azaz osztható 7-tel. Mivel a bal oldal biztosan nem osztható 7-tel, így belátható, hogy az egyenletnek nincs más megoldása.