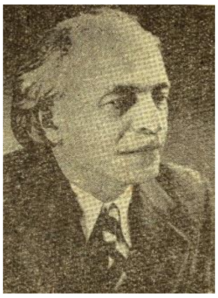


XVII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2019. december 8.

11. évfolyam

1. Igazold, hogy az egyenlő oldalú háromszögben egy tetszőleges belső pont távolságainak összege az oldalaktól állandó! Ha a háromszög oldala a, akkor fejezd ki ezt az összeget a függvényében!

2. Az ABC háromszög A csúcsából induló szögfelezője a háromszög köré írható körét E pontban metszi. A kör E pontbeli érintője az AC egyenest D pontban metszi, az AB egyenest pedig F pontban. Bizonyítsd be, hogy ekkor teljesül a $BE \cdot (AD + AF) = AE \cdot FD$ egyenlőség!

3. Oldd meg az egyenletet a valós számok halmazán:

$$2^{1+2\cos 6x} + 16^{\sin^2 3x} = 9$$

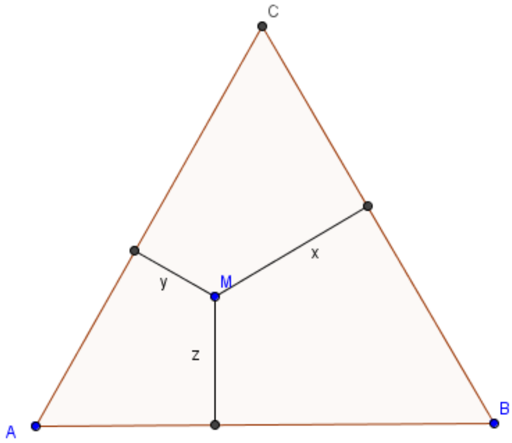
4. A 2019 szám olyan, hogy ha számjegyeit megkettőzve írjuk le, akkor a kapott 22001199 számban bármely szomszédos három számjegyet is olvassuk egybe, nem kapunk 3-mal osztható számot. Hány ilyen tulajdonságú négyjegyű szám létezik?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XVII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI – <u>11. évfolyam</u>

1. Igazold, hogy az egyenlő oldalú háromszögben egy tetszőleges belső pont távolságainak összege az oldalaktól állandó. Ha a háromszög oldala a, akkor fejezd ki ezt az összeget a függvényében.



Megoldás: Legyen M pont az ABC egyenlő oldalú háromszög belső tartományában lévő pont, és legyenek x, y, z rendre az M pont távolsága a BC, CA, AB oldalaktól.

Legyen h az ABC egyenlő oldalú háromszög magassága, és legyenek T_{ABC}, T_{BMC}, T_{AMC}, T_{ABM} rendre az ABC, BCM, AMC, ABM háromszögek területei. Ekkor

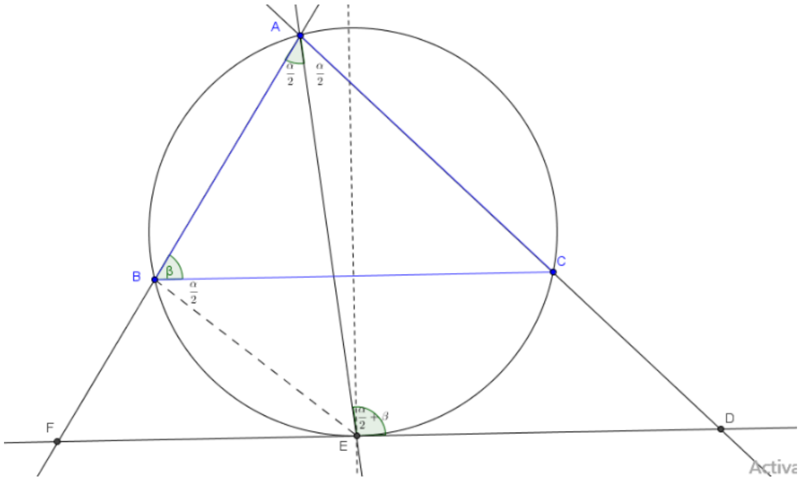
$T_{ABC} = T_{BCM} + T_{CAM} + T_{ABM}$,

vagyis $\frac{ah}{2} = \frac{a \cdot x}{2} + \frac{a \cdot y}{2} + \frac{a \cdot z}{2} = \frac{a}{2} \cdot (x+y+z)$, ezért $x+y+z = h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

2. Az ABC háromszög A csúcsából induló szögfelezője a háromszög köré írható körét E pontban metszi. A kör E pontbeli érintője az AC egyenest D pontban metszi, az AB egyenest pedig F pontban. Bizonyítsd be, hogy ekkor teljesül a $BE \cdot (AD + AF) = AE \cdot FD$ egyenlőség!

Megoldás: Az $AED\angle$ érintő szárú szög és az $ABE\angle$ kerületi szög azonos ívekhez tartoznak, ezért egybevágóak, $AED\angle \cong ABE\angle = \beta + \frac{\alpha}{2}$, tehát AED és ABE háromszögek hasonlóak, mert két belső szögük egybevágó. Ezért megfelelő oldalaik aránya egyenlő $\frac{ED}{BE} = \frac{AD}{AE}$, azaz

$ED = \frac{AD \cdot BE}{AE}$.



A szögfelező tételből $\frac{FE}{ED} = \frac{AF}{AD}$,

ahonnan $FE = \frac{AF \cdot ED}{AD}$.

Mivel $FD = FE + ED$, ezért az előbbiek alapján

$FD = \frac{AF \cdot ED}{AD} + \frac{AD \cdot BE}{AE}$.

Osszuk el ezt BE-vel:

$\frac{FD}{BE} = \frac{AF \cdot ED}{AD \cdot BE} + \frac{AD}{AE}$.

A háromszögek hasonlóságából $\frac{FD}{BE} = \frac{AF \cdot AD}{AD \cdot AE} + \frac{AD}{AE}$.

Egyszerűsítés után $\frac{FD}{BE} = \frac{AF + AD}{AE}$, tehát $BE \cdot (AD + AF) = AE \cdot FD$.

3. Oldd meg az egyenletet a valós számok halmazán: $2^{1+2\cos 6x} + 16^{\sin^2 3x} = 9$

Megoldás: Mivel $\sin^2 3x = \frac{1-\cos 6x}{2}$, az adott egyenlet ekvivalens $2 \cdot 2^{2\cos 6x} + \frac{4}{2^{2\cos 6x}} = 9$.

$t = 2^{2\cos 6x}$ helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$2t^2 - 9t + 4 = 0,$$

amely egyenlet megoldásai $t_1 = 4$, $t_2 = \frac{1}{2}$. Visszahelyettesítve kapjuk, hogy az eredeti egyenlet megoldásai : $x_k = \frac{k\pi}{3}$, $x_n = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{n\pi}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}$.

4. A 2019 **szám olyan, hogy ha számjegyeit megkettőzve írjuk le, akkor a kapott** 22001199 **számban bármely szomszédos három számjegyet is olvassuk egybe, nem kapunk** 3-**mal osztható számot. Hány ilyen tulajdonságú négyjegyű szám létezik?**

Megoldás: Elegendő a 3-as szám osztási maradékainak osztályait figyelni, ezeket jelöljük **0**, **1**, **2** módon, azaz **0** $= \{0,3,6,9\}$, **1** $= \{1,4,7\}$, **2** $= \{2,5,8\}$. Ha a négyjegyű számban két azonos maradékosztálybeli szám van egymás mellett, azokból a kettőzés után négy azonos számjegy lesz egymás mellett, amelyekből hármat összeolvasva 3-mal osztható számot kapunk. Próbálgatással (például az összes eset kipróbálása után) megállapíthatjuk, hogy ha különböző maradékosztályba eső számokat írunk egymás mellé, akkor az a négyjegyű szám megfelel a feltételeknek. Ezeket kell összeszámolnunk. A következő lehetőségek vannak:

1.) **0 1 0 1**;	2.) **0 1 0 2**;	3.) **0 1 2 0**;	4.) **0 1 2 1**;
5.) **0 2 0 1**;	6.) **0 2 0 2**;	7.) **0 2 1 0**;	8.) **0 2 1 2**;
9.) **1 0 1 0**;	10.) **1 0 1 2**;	11.) **1 0 2 0**;	12.) **1 0 2 1**;
13.) **1 2 0 1**;	14.) **1 2 0 2**;	15.) **1 2 1 0**;	16.) **1 2 1 2**;
17.) **2 0 1 0**;	18.) **2 0 1 2**;	19.) **2 0 2 0**;	20.) **2 0 2 1**;
21.) **2 1 0 1**;	22.) **2 1 0 2**;	23.) **2 1 2 0**;	24.) **2 1 2 1**.

Az **1** és a **2** maradékosztály 3 elemű, így ott hármas szorzóval kell számolni. A **0** maradékosztály az első helyen 3, a többi helyen 4 lehetőséget kínál. Ezek szerint a lehetőségek száma a megszámozott esetekben így alakul:

Amikor a második, harmadik és negyedik helyen nem tartalmaz 0-t:

$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$ lehetőség a következő esetekben: 4, 8, 16, 24;

Amikor két 0-t tartalmaz, egyiket sem az első helyen:

$4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 = 144$ lehetőség a következő esetekben: 9, 11, 17, 19;

A többi esetben:

$4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 108$ lehetőség a következő esetekben:

1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 12, 13, 14, 15, 18, 20, 21, 22, 23;

Azaz az összes esetek száma: $4 \cdot 81 + 16 \cdot 108 + 4 \cdot 144 = 2628$.