

XV. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2017. december 2.

10. évfolyam

1. Egy társaság meghatározott számú tallért oszt szét egymás között. Az első kap 10 tallért, meg még a maradék tizedét. A második kap 20 tallért, és még az így megmaradt tallérok tizedét. A harmadik kap 30 tallért, és még az így megmaradt tallérok tizedét, és így tovább mindaddig, amíg el nem fogy az összes tallér. Ekkor kiderült, hogy mindenki ugyanannyi tallért kapott. Hány tagú a társaság?
2. Határozd meg az összes olyan négyjegyű négyzetszámot, amelynek számjegyeit eggyel megnövelve a kapott négyjegyű szám szintén négyzetszám!
3. Egy kört az AB átmérője két ívre osztja. Ezek közül az egyiken kijelöljük a C és D pontokat. Legyen az AC és BD egyenesek metszéspontja P , az AD és BC egyenesek metszéspontja pedig Q . Mekkora szöget zár be a PQ egyenes az AB átmérővel?
4. a) Adott egy 8×8 -as táblázat. Nevezzük főátlónak a bal alsó sarkot és a jobb felső sarkot összekötő szakaszt. A főátló alatti mezőket 0-kal töltjük ki, míg a többi mezőbe pozitív egész számokat írunk. A kitöltés után kiszámoljuk a sor- és az oszlopösszegeket. Lehetséges-e, hogy a sor- és az oszlopösszegekre az $1, 2, 3, \dots, 16$ számokat kapjuk eredményül (valamilyen sorrendben)?
b) Ha egy 7×7 -es táblázatunk van, akkor lehetséges-e olyan, a fenti módon megadott kitöltés, hogy a sor- és az oszlopösszegekre az $1, 2, 3, \dots, 14$ számokat kapjuk eredményül (valamilyen sorrendben)?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

MEGOLDÁSOK – 10. évfolyam

1. Egy társaság meghatározott számú tallért oszt szét egymás között. Az első kap 10 tallért, meg még a maradék tizedét. A második kap 20 tallért, és még az így megmaradt tallérok tizedét. A harmadik kap 30 tallért, és még az így megmaradt tallérok tizedét, és így tovább mindaddig, amíg el nem fogy az összes tallér. Ekkor kiderült, hogy mindenki ugyanannyi tallért kapott. Hány tagú a társaság?

Megoldás: A tallérok számát jelöljük x -szel. Az első személy ezek szerint

$10 + \frac{x-10}{10}$ tallért kapott, míg a második $20 + \frac{x-10 - \frac{x-10}{10} - 20}{10}$ tallért kapott. A feltételek szerint ez a két mennyiség egyenlő, vagyis az

$$10 + \frac{x-10}{10} = 20 + \frac{x-10 - \frac{x-10}{10} - 20}{10}$$

egyenlet megoldása adja a keresett számot: $x = 810$. Mivel mindenki egyformán 90 tallért kap, ezért a társaság kilenctagú.

Válasz: 9 tagú a társaság.

2. Határozd meg az összes olyan négyjegyű négyzetszámot, amelynek számjegyeit eggyel megnövelve a kapott négyjegyű szám szintén négyzetszám!

Megoldás: Jelölje x^2 a keresett négyjegyű számot, y^2 pedig azt a négyjegyű számot, ahol az előző négyjegyű szám számjegyeit eggyel megnöveltük. Ebben az esetben a két szám különbsége 1111, tehát az $x^2 - y^2 = 1111$ egyenletet kell megoldani, ahol az x és y pozitív egész számok. Az egyenletet átalakítva kapjuk:

$$x - y \quad x + y = 1111.$$

Az 1111 prímtényezői a 11 és a 101 ezért az 1111-nek az osztói: 1, 11, 101 és 1111.

Így a lehetőségek:

1. eset: $x - y = 1$

$x + y = 1111$ ebből $x = 556$ és $y = 555$, de ez nem megoldás.

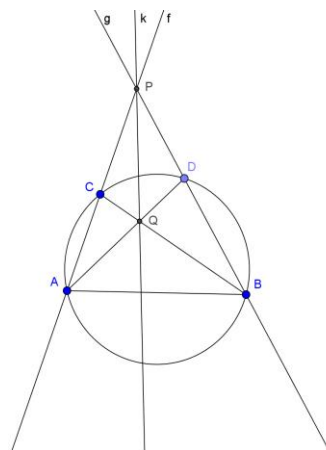
2. eset: $x - y = 11$

$x + y = 101$ ebből $x = 56$ és $y = 45$, ez jó megoldás.

Válasz: A keresett négyjegyű szám a 2025.

3. Egy kört az AB átmérője két ívre osztja. Ezek közül az egyiket kijelöljük a C és D pontokat. Legyen az AC és BD egyenesek metszéspontja P , az AD és BC egyenesek metszéspontja pedig Q . Mekkora szöget zár be a PQ egyenes az AB átmérővel?

Megoldás: A Thalész-tétel alapján az ACB szög és az ADB szög derékszög. Ennek következtében az APB háromszögben AD és BC magasságvonalak. Így metszéspontjuk Q az APB háromszög magasságpontja, PQ pedig a harmadik magasságvonala, azaz a PQ egyenes merőleges az AB -re.
Válasz: A PQ egyenes az AB átmérővel derékszöget zár be.



4. a) Adott egy 8×8 -as táblázat. Nevezzük főátlónak a bal alsó sarkot és a jobb felső sarkot összekötő szakaszt. A főátló alatti mezőket 0-kal töltjük ki, míg a többi mezőbe pozitív egész számokat írunk. A kitöltés után kiszámoljuk a sor- és az oszlopösszegeket. Lehetséges-e, hogy a sor- és az oszlopösszegekre az $1, 2, 3, \dots, 16$ számokat kapjuk eredményül (valamilyen sorrendben)?

b) Ha egy 7×7 -es táblázatunk van, akkor lehetséges-e olyan, a fenti módon megadott kitöltés, hogy a sor- és az oszlopösszegekre az $1, 2, 3, \dots, 14$ számokat kapjuk eredményül (valamilyen sorrendben)?

Megoldás: a) Elérhető a kívánt kitöltés. Egyik ilyen kitöltés látható az ábrán. Bármilyen helyes kitöltés elfogadható.

2	2	2	2	2	2	2	1	15
2	2	2	2	2	2	2	0	14
2	2	2	2	2	1	0	0	11
2	2	2	2	2	0	0	0	10
2	2	2	1	0	0	0	0	7
2	2	2	0	0	0	0	0	6
2	1	0	0	0	0	0	0	3
2	0	0	0	0	0	0	0	2
16	13	12	9	8	5	4	1	

b) A kívánt kitöltés nem valósítható meg. Indirekt módszerrel bizonyítjuk, azaz tegyük fel, hogy megvalósítható a kívánt kitöltés a 7×7 -es táblán is.

Adjuk össze a 7 sorösszeget, illetve a 7 oszlopösszeget. Legyen ez az összeg S . Az S -t úgy is megkaphattuk volna, hogy a táblázat számait kétszer összeadjuk, tehát az S páros szám. A feltételünk alapján az oszlopösszeg és a sorösszeg valamilyen sorrendben az $1, 2, 3, \dots, 14$ számok. Azaz $S = 1 + 2 + 3 + \dots + 14 = 105$. Ez ellentmond S párosságával, így ellentmondásra jutottunk.

Válasz: A kívánt kitöltés nem valósítható meg.