



XXIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2025. december 7.

5. évfolyam

1. Hány különböző alakú téglalapot lehet összeállítani 36 darab egyforma (egybevágó) négyzetlapból, ha egy-egy téglalaphoz mindegyik négyzetlapot fel kell használni? (Azokat a téglalapokat nem különböztetjük meg, amelyek elforgatással megkaphatók egymásból.)

2. Elkezdjük leírni a természetes számokat 2025-től visszafelé. Így először a 2-t, másodikként a 0-át, majd rendre a 2, 5, 2, 0, 2, 4 számjegyet írtuk le.

a) Milyen számjegy kerül a 23. helyre?

b) Milyen számjegy van a 80. helyen?

c) Milyen számjegy áll az 5000. helyen?

3. Két párhuzamos egyenes közül az egyiken 4, a másikon pedig 5 különböző pontot jelöltünk ki. Hány olyan háromszög van, amelynek minden csúcsa a kijelölt pontok közül való?

4. December első hetében egy osztályban 10 tanuló legalább egy ötöst, 8 tanuló legalább két ötöst, 7 tanuló legalább három ötöst, 5 tanuló pedig legalább négy ötöst kapott. Pontosan öt ötöst 2 tanuló kapott. Ötnél több ötöst senki sem szerzett. Hány ötöst gyűjtöttek az egy hét alatt a tanulók összesen?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XXIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI – 5. évfolyam

1. Hány különböző alakú téglalapot lehet összeállítani 36 darab egyforma (egybevágó) négyzetlapból, ha egy-egy téglalaphoz mindegyik négyzetlapot fel kell használni? (Azokat a téglalapokat nem különböztetjük meg, amelyek elforgatással megkaphatók egymásból.)

Megoldás. Egy téglalap oldalai csak egész számú négyzetből állnak. Jelölje az egyik oldal hosszát a , a másikat pedig b , akkor $a \cdot b = 36$.

A 36-ot természetes számok szorzataként a következő módon tudjuk felírni:

$$36 = 1 \cdot 36 = 2 \cdot 18 = 3 \cdot 12 = 4 \cdot 9 = 6 \cdot 6.$$

Mivel azokat a téglalapokat nem különböztetjük meg, amelyek elforgatással kaphatók meg egymásból, így összesen 5 különböző alakú téglalapot lehet összeállítani.

2. Elkezdjük leírni a természetes számokat 2025-től visszafelé. Így először a 2-t, másodikként a 0-át, majd rendre a 2, 5, 2, 0, 2, 4 számjegyet írtuk le.

a) Milyen számjegy kerül a 23. helyre?

b) Milyen számjegy van a 80. helyen?

c) Milyen számjegy áll az 5000. helyen?

Megoldás. Az első 1026 darab leírt szám négyjegyű ($2025 - 999 = 1026$).

a) Miután $23 = 5 \cdot 4 + 3$, ezért a 23. helyen a 6. leírt négyjegyű szám, a 2020 harmadik számjegye szerepel, vagyis a 2-es található.

b) Miután $80 = 20 \cdot 4$, ezért a 80. helyen a 20. leírt szám, a 2006 negyedik számjegye szerepel, vagyis a 6-os áll.

c) Miután $1026 \cdot 4 = 4104$, ezért minden négyjegyű számot leírtunk. $5000 - 4104 = 896$, $896 = 298 \cdot 3 + 2$, ezért visszafelé a 299. háromjegyű szám második számjegye a kérdés.

A 299. háromjegyű szám a 701, ezért az 5000. helyen leírt számjegy a 0.

3. Két párhuzamos egyenes közül az egyikben 4, a másikon pedig 5 különböző pontot jelöltünk ki. Hány olyan háromszög van, amelynek minden csúcsa a kijelölt pontok közül való?

Megoldás. Jelölje b azt az egyenest, amelyen 4 pontot, c pedig azt az egyenest, amelyen 5 pontot jelöltünk ki. A keresett háromszögek egyik csúcsa az egyik, a további két csúcsa pedig a másik egyenesen van (mindhárom csúcs nem lehet ugyanazon az egyenesen, mert akkor nem keletkezne háromszög). Ez alapján két eset lehetséges:

1. eset: A keresett háromszögek egy csúcsa a b egyenesre, két csúcsa pedig a c egyenesre illeszkedik. A b egyenesen egy pontot négyféleképpen választhatunk ki. A c egyenesen az első pontot ötféleképpen, míg a másikat négyféleképpen választhatjuk ki. Ebben a kiválasztásban a c egyenesen minden pontpárt kétszer számoltunk, ezért a két pontot $(5 \cdot 4) : 2 = 10$ -féleképpen választhatjuk ki. Mivel a b egyenes bármelyik pontjához kapcsolni tudjuk a c egyenes bármelyik pontpárját, ezért a keletkező háromszögek száma $4 \cdot 10 = 40$.

2. eset: A keresett háromszögek egy csúcsa a c egyenesre, két csúcsa pedig a b egyenesre illeszkedik. A c egyenesen egy pontot ötféleképpen választhatunk ki. A b egyenesen a

pontpárokat az előző esethez hasonlóan $(4 \cdot 3) : 2 = 6$ -féleképpen választhatjuk ki. A megfelelő háromszögek száma ebben az esetben tehát $5 \cdot 6 = 30$.
Összesen tehát $40 + 30 = 70$ háromszöget tudunk megrajzolni a feltételek alapján.

4. December első hetében egy osztályban 10 tanuló legalább egy ötöst, 8 tanuló legalább két ötöst, 7 tanuló legalább három ötöst, 5 tanuló pedig legalább négy ötöst kapott. Pontosan öt ötöst 2 tanuló kapott. Ötnél több ötöst senki sem szerzett. Hány ötöst gyűjtöttek az egy hét alatt a tanulók összesen?

Megoldás. Haladjunk visszafelé az összeszámlálással:

- pontosan öt ötöst 2 tanuló kapott, ez 10 ötös,
- legalább négy ötöst 5 tanuló kapott, ezért pontosan négy ötöst $5 - 2 = 3$ tanuló kapott, 12 ötös,
- legalább három ötöst 7 tanuló kapott, ezért pontosan három ötöst $7 - 5 = 2$ tanuló kapott, ez 6 ötös,
- legalább két ötöst 8 tanuló kapott, ezért pontosan két ötöst $8 - 7 = 1$ tanuló kapott, ez 2 ötös,
- és legalább egy ötöst 10 tanuló kapott, ezért pontosan egy ötöst $10 - 8 = 2$ tanuló kapott, ez 2 ötös.

Így az osztály tanulói összesen $10 + 12 + 6 + 2 + 2 = 32$ ötöst gyűjtöttek össze.