XVIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2020. január 29.

<u>11. évfolyam</u>

1. Határozd meg az összes olyan n természetes számot, amelyre érvényes, hogy $n+1$, $n+3$, $n+7$, $n+9$, $n+13$ és $n+15$ mindegyike prímszám!

2. Oldd meg az egyenletet: $\dfrac{\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x}{3\sin x + \cos 2x} = \operatorname{ctg} 2x$.

3. Legyenek AB és CD olyan 1 hosszúságú szakaszok, amelyek az O pontban metszik egymást úgy, hogy $AOC\angle = \dfrac{\pi}{3}$. Bizonyítsd be, hogy $AC + BD \geq 1$.

4. Oldd meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$\left(x^2 + x + 3\right)\left(x^2 + 3x + 3\right) = 3x^2.$$

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XVIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI – 11. évfolyam

1. Határozd meg az összes olyan n természetes számot, amelyre érvényes, hogy $n+1$, $n+3$, $n+7$, $n+9$, $n+13$ és $n+15$ mindegyike prímszám!

Megoldás: Kezdőhelyzetben *n=4* az egyetlen megoldás, ekkor 5, 7, 11, 13, 17, 19 mindegyike prímszám.
Vizsgáljuk ki *n* szám öttel való maradékosztályait: 0, 1, 2, 3, 4. Ekkor egyiknek öttel kell oszthatónak lennie, de mivel prímszám, tehát éppen öt, akkor *n+1=5*, vagyis *n=4*.
n=2-re *n+7=9* nem prímszám.

2. Oldd meg az egyenletet: $\dfrac{\text{ctg}\,x-\text{tg}\,x}{3\sin x+\cos 2x}=\text{ctg}2x$

Megoldás: Végezzük el a következő átalakításokat: $\text{tg}\,x=\dfrac{1}{\text{ctg}\,x}$ és $\text{tg}2x=\dfrac{2\text{tg}\,x}{1-\text{tg}^2x}$.

Ekkor az adott egyenlet így alakul át:

$$\frac{1-\text{tg}^2x}{\text{tg}\,x\cdot(3\sin x+\cos 2x)}=\frac{1-\text{tg}^2x}{2\text{tg}\,x}.$$

Ebből adódik, hogy $1-\text{tg}^2x=0$ vagy $3\sin x+\cos 2x=2$ és $\text{tg}\,x\neq 0$.

***1.eset*:** $1-\text{tg}^2x=0$

$\text{tg}\,x=\pm 1$

$x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi \quad \vee \quad x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi, \quad k\in Z$.

***2.eset*:** $3\sin x+\cos 2x=2$

$3\sin x+\cos^2 x-\sin^2 x=2$

$3\sin x+1-2\sin^2 x=2$

$2\sin^2 x-3\sin x+1=0$

$\sin x=1 \quad \vee \quad \sin x=\dfrac{1}{2}$.

Ha $\sin x=1$, akkor $\text{tg}\,x=0$, de ez lehetetlen.

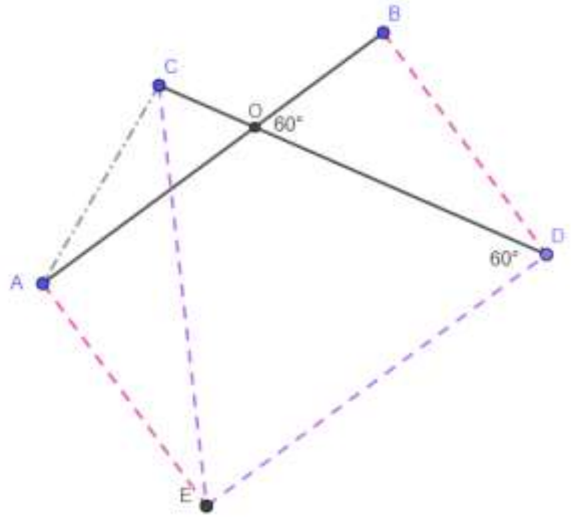
Ha $\sin x=\dfrac{1}{2}$, akkor $x=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi \quad \vee \quad x=\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi, \quad k\in Z$.

Megoldáshalmaz:

$$M=\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi,-\frac{\pi}{4}+n\pi,\ \frac{\pi}{6}+2l\pi,\ \frac{5\pi}{6}+2m\pi \mid k\in Z,n\in Z,l\in Z,m\in Z\right\}$$

3. Legyenek AB és CD olyan 1 hosszúságú szakaszok, amelyek az O pontban metszik egymást úgy, hogy $AOC\angle = \frac{\pi}{3}$. Bizonyítsd be, hogy $AC + BD \geq 1$.

Megoldás: Az adott elemekhez válasszuk E pontot úgy, hogy CDE háromszög szabályos legyen, és az A és E pontok a CD egyenes ugyanazon oldalán vannak. Ekkor $CDE\angle = COA\angle = \frac{\pi}{3}$, ezért AB párhuzamos ED egyenessel.



Mivel $AB = ED$, ezért $ABDE$ paralelogramma, s akkor $AE = BD$.
Alkalmazzuk a háromszög-egyenlőtlenséget az ACE háromszögre:

$$1 = CE \leq AC + AE = AC + BD,$$

s így megkapjuk, amit bizonyítani kellett.

4. Oldd meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$\left(x^2 + x + 3\right)\left(x^2 + 3x + 3\right) = 3x^2$$

Megoldás: Az egyenlet bal oldalát átalakíthatjuk:

$$\left(x^2 + x + 3\right)\left(x^2 + 3x + 3\right) = \left(x^2 + 2x + 3 - x\right)\left(x^2 + 2x + 3 + x\right) = \left(x^2 + 2x + 3\right)^2 - x^2.$$

Az egyenlet felírható az alábbi alakban:

$$\left(x^2 + 2x + 3\right)^2 - x^2 = 3x^2$$

$$\left(x^2 + 2x + 3\right)^2 = 4x^2$$

$$\left(x^2 + 2x + 3\right) = 2x \text{ vagy } \left(x^2 + 2x + 3\right) = -2x$$

Az első egyenlenek nincs valós megoldása, mert $x^2 = -3$.
a második egyenletben $x^2 + 4x + 3 = 0$ megoldásai $x_1 = -3,\ x_2 = -1$.
Ezek szerint a megoldáshalmaz:

$$M = \{-1, -3\}$$