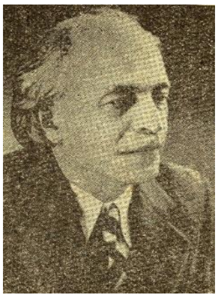


XXII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2024. december 8.

10. évfolyam

1. Létezik-e olyan négyzet, melynek területe felírható $9p+1$ alakban, ahol p prímszám és a négyzet oldala egész szám?

2. Adott az $x^2+mx+n=0$ másodfokú egyenlet. Határozd meg az m és n paraméterek mindazon értékét, melyre tejesül, hogy a gyökök négyzetösszege 2024^2 valamint, $|m-n|=2024$. Hány darab másodfokú egyenletet írhatunk fel a kapott paraméterek segítségével?

3. Hány olyan kilencjegyű szám létezik, melyre teljesül, hogy számjegyei között pontosan négy darab 0 található, az összes többi számjegyét pedig egymástól különböző számjegyek alkotják, valamint igaz, hogy az egyesek és a százasok helyén prímszám áll?

4. Legyen az ABC derékszögű háromszög ($C\angle=90°$) átfogójához tartozó magasságának talppontja a T pont. Mutasd meg, hogy az ABC, BCT és ACT háromszögekbe írható körök sugarainak összege megegyezik a CT magassággal!

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XXII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI – 10. évfolyam

1. Létezik-e olyan négyzet, melynek területe felírható $9p+1$ alakban, ahol p prímszám és a négyzet oldala egész szám?

Megoldás. Jelöljük a négyzet oldalát a-val, ekkor területe felírható, mint a^2.
A feladat szövege alapján felállíthatjuk a következő egyenletet: $a^2 = 9p+1$
Átrendezve az egyenletet: $a^2 - 1 = 9p$

$(a-1)(a+1) = 9p$ diophantoszi egyenlethez jutunk.

Az egyenlőség bal oldalán két tényező szorzata áll, a jobb oldali kifejezésből pedig az alábbi kéttényezős szorzatokat képezhetjük: $1 \cdot 9p$, $9p \cdot 1$, $3 \cdot 3p$, $3p \cdot 3$, $9 \cdot p$, $p \cdot 9$.
Ez alapján 8 esetünk van:

I. $(a-1)(a+1) = 1 \cdot 9p$, ahonnan $a-1=1$ és $a+1=9p$, tehát $a=2$ és $3=9p$, azaz $p=\frac{1}{3}$, ami ellentmondás, hiszen p prím.

II. $(a-1)(a+1) = 9p \cdot 1$, ahonnan $a+1=1$, vagyis $a=0$, ami nem lehetséges mivel a négyzet oldala nem lehet 0.

III. $(a-1)(a+1) = 3 \cdot 3p$, ahonnan $a=4$ és $p=\frac{5}{3}$, de ekkor p nem prím.

IV. $(a-1)(a+1) = 3p \cdot 3$, ahonnan $p=\frac{1}{3}$ és $a=2$, de ekkor p nem prím.

V. $(a-1)(a+1) = 9 \cdot p$, ahonnan $a=10$ és $p=11$, ami egy helyes megoldás.

VI. $(a-1)(a+1) = p \cdot 9$, ahonnan $p=7$ és $a=8$, ami szintén egy helyes megoldás.

A fenti esetekből következik, hogy két olyan négyzet létezik, ami teljesíti a fenti feltételeket, mégpedig egy 8 egység hosszú valamint egy 10 egység hosszú négyzet.

2. Adott az $x^2+mx+n=0$ másodfokú egyenlet. Határozd meg az m és n paraméterek mindazon értékét, melyre tejesül, hogy a gyökök négyzetösszege 2024^2 valamint, $|m-n| = 2024$. Hány darab másodfokú egyenletet írhatunk fel a kapott paraméterek segítségével?

Megoldás. A gyökök négyzetösszegét felírhatjuk a következő formában: $x_1^2 + x_2^2$, ami alapján a következő egyenlethez jutunk: $x_1^2 + x_2^2 = 2024^2$
Viete képletek segítségével felírható a gyökök négyzetösszege, miszerint:
$x_1^2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(\frac{-b}{a}\right)^2 - 2\frac{c}{a} = \left(\frac{-m}{1}\right)^2 - 2\frac{n}{1} = m^2 - 2n$ összefüggést kapjuk, mely alapján: $m^2 - 2n = 2024^2$.

Meg kell jegyeznünk, hogy ez az összefüggés nem csak a Viete képletek segítségével kapható meg, hanem a megoldóképlet segítségével felírt gyök négyzetösszegéből is.
Tehát adott az $m^2 - 2n = 2024^2$ és $|m-n| = 2024$ kétismeretlenes egyenletrendszer.

Az első egyenletet átrendezhetjük:

$$m^2-2024^2=2n$$

$$(m-2024)(m+2024)=2n$$

A második egyenletből két eset írható fel:

I. $m-n=-2024$, azaz $n=2024+m$, ha $m-n<0$, azaz és $m<n$

II. $m-n=2024$, azaz $n=m-2024$, ha, $m-n>0$ azaz $m>n$

Az előbb kapott összefüggést most behelettesíthetjük az első egyenletbe:

I. $(m-2024)(m+2024)=2(2024+m)$

$(m-2024)(m+2024)-2(m+2024)=0$

$(m+2024)(m-2024-2)=0$, ahonnan

$m_1=-2024$ és $m_2=2026$, melyekre

$n_1=0$ és $n_2=4050$

Mindkét megoldáspárt elfogadhatjuk, hiszen teljesül, hogy $m<n$.

II. $(m-2024)(m+2024)=2(m-2024)$

$(m-2024)(m+2024)-2(m-2024)=0$

$(m-2024)(m+2024-2)=0$, amiből következik, hogy

$m_3=2024$ és $m_4=2022$, melyekre

$n_3=0$ és $n_4=-2$

Itt is mindkét megoldáspárt elfogadhatjuk, hiszen teljesül, hogy $m>n$.

Mindent összegezve 4 különböző másodfokú egyenletet határozhatunk meg ezek a feltételek alapján, mégpedig:

$$x^2-2024x=0$$
$$x^2+2026x+4050=0$$
$$x^2+2024x=0$$
$$x^2+2022x-2=0$$

3. Hány olyan kilencjegyű szám létezik, melyre teljesül, hogy számjegyei között pontosan négy darab 0 található, az összes többi számjegyét pedig egymástól különböző számjegyek alkotják, valamint igaz, hogy az egyesek és a százasok helyén prímszám áll?

Megoldás. Kezdjük a fix pozíciók vizsgálatával.

$$\underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underset{p}{\underline{\quad}}\ \underline{\quad}\ \underset{p}{\underline{\quad}}$$

Az egyesek helyére a 2,3,5,7 azaz 4 különböző számjegyből választhatunk, a százasok helyére pedig 3 különböző prímet választhatunk, hiszen egyet már elhasználtunk a négyből az egyesek helyére. Ez eddig összesen $4\cdot3=12$ esetet jelent.

Most vizsgáljuk meg hányféleképpen helyezhetjük el a négy darab 0-át.

$$\underset{\varnothing}{\underline{\quad}}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underset{\varnothing}{\underline{\quad}}\ \underline{\quad}\ \underset{\varnothing}{\underline{\quad}}$$

Nem kerülhet a 0 számjegy azokra a pozíciókra, ahol biztosan prímszámok szerepelnek, valamint nem kezdődhet 0-val, hiszen akkor nem lenne kilencjegyű a számjegy. Ezek alapján a 0 számjegy 6 különböző helyre kerülhet, azaz 6 pozícióból 4-et kell kiválasztanunk, ami pontosan $\binom{6}{4}=\frac{6!}{4!\cdot 2!}=\frac{6\cdot 5}{2}=15$ lehetséges esetet jelent.

Végül vizsgáljuk meg, hogy hányféleképpen helezhetjük el a fennmaradó szabad pozíciókra a megmaradt 7 különböző számjegyet.

— — — — — — — — —

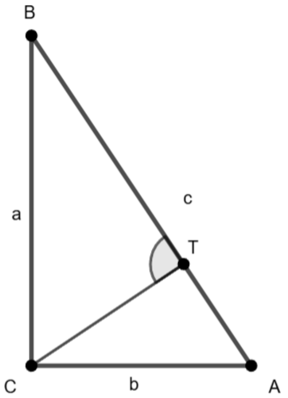
0 0 0 0 p p

Láthatjuk, hogy 3 darab üresen maradt helyiértékünk van, melyre a megmaradt 7 különböző számjegyet $7\cdot 6\cdot 5=210$ féleképpen tudjuk elhelyezni.

Figyelembe véve az összes feltételt $12\cdot 15\cdot 210=37800$ különböző kilencjegyű számjegyet tudunk alkotni.

4. Legyen az ABC derékszögű háromszög ($C\angle=90°$) átfogójához tartozó magasságának talppontja a T pont. Mutasd meg, hogy az ABC, BCT és ACT háromszögekbe írható körök sugarainak összege megegyezik a CT magassággal!

Megoldás. Először is készítsünk egy vázlatos ábrát:



Be kell látnunk, hogy $r+r_{ACT}+r_{BCT}=|CT|$.

A háromszög területét kiszámíthatjuk a beírható kör sugara és a félkerület segítségével. $T=r\cdot s$, ahol $s=\frac{a+b+c}{2}$.

Ez alapján a beírható kör sugarára érvényes a következő összefüggés: $r=\frac{T}{s}=\frac{\frac{ab}{2}}{\frac{a+b+c}{2}}=\frac{ab}{a+b+c}$.

Mielőtt elkezdenénk felírni minden háromszög esetén a rá vonatkozó területet és kerületet vegyük észre, hogy a magasság 2 derékszögű háromszögre osztja fel az eredeti háromszöget, s ezek a háromszögek hasonlóak egymással.

Az $ABC\triangle\sim ACT\triangle$, hiszen $BAC\sphericalangle=TAC\sphericalangle$ valamint $ACB\sphericalangle=ATC\sphericalangle=90^\circ$ így harmadik szögük és megegyezik.

Az $ABC\triangle\sim BCT\triangle$, ami az előzőhöz hasonlóan belátható.

Kihasználva a háromszögek hasonlóságát, kifejezhetjük a CT magasságot is a háromszög oldalainak segítségével, valamint a beírt körök sugarai között is aránypárokat írhatunk fel.

$\frac{|CT|}{b}=\frac{a}{c}$, amiből következik, hogy $|CT|=\frac{ab}{c}$

$\frac{r_{ACT}}{r}=\frac{b}{c}$, mely alapján $r_{ACT}=\frac{b}{c}r$ valamint $\frac{r_{BCT}}{r}=\frac{a}{c}$, mely alapján $r_{BCT}=\frac{a}{c}r$

Ez alapján a beírható körök sugárösszege:

$r+r_{ACT}+r_{BCT}=r+\frac{b}{c}r+\frac{a}{c}r=r\cdot\frac{a+b+c}{c}=\frac{ab}{a+b+c}\cdot\frac{a+b+c}{c}=\frac{ab}{c}$ ami éppen megyezik a vizsgált magassággal, így igazoltuk az állítást.