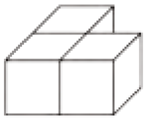
XXI. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2023. december 2.

6. évfolyam

1. Melyik az a legkisebb kocka, amely kitölthető bizonyos mennyiségű a képen látható összetett test segítségével? Mutass be egy megfelelő elrendezést is!



2. Lappföldön, a Télapó manói ügyességi versenyt rendeztek. A döntőbe jutott manók rajtszámaira pedig teljesül, hogy

- **olyan négyjegyű számok, melynek számjegyei különbözőek, tehát nincs bennük ismétlődés;**
- **a rajtszám páros prímmel kezdődik;**
- **ha elhagyjuk a rajtszám utolsó számjegyét, akkor a szám osztható lesz 5-tel;**
- **ha a rajtszám első számjegyét hagyjuk el, akkor egy 3-mal osztható háromjegyű számot kapunk;**
- **ha a rajtszám második számjegyét hagyjuk el, akkor a megmaradt háromjegyű szám 4-gyel lesz osztható.**

Hány manó került be a döntőbe?

3. Határozd meg a p, q, r, s, t 100-nál kisebb, nem feltétlenül különböző prímszámokat úgy, hogy igaz legyen a $p(q+r)(s-t)=2023$ egyenlőség!

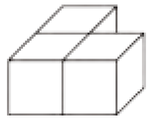
4. Legyenek D és E pontok rendre az ABC hegyesszögű háromszög AC és BC oldalainak felezőpontjai, az F pont pedig az ADE és BED szögek szögfelezőinek metszéspontja. Bizonyítsd be: ha F pont rajta van a háromszög AB oldalán, akkor a háromszögre teljesül, hogy $AB=\dfrac{AC+BC}{2}$.

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

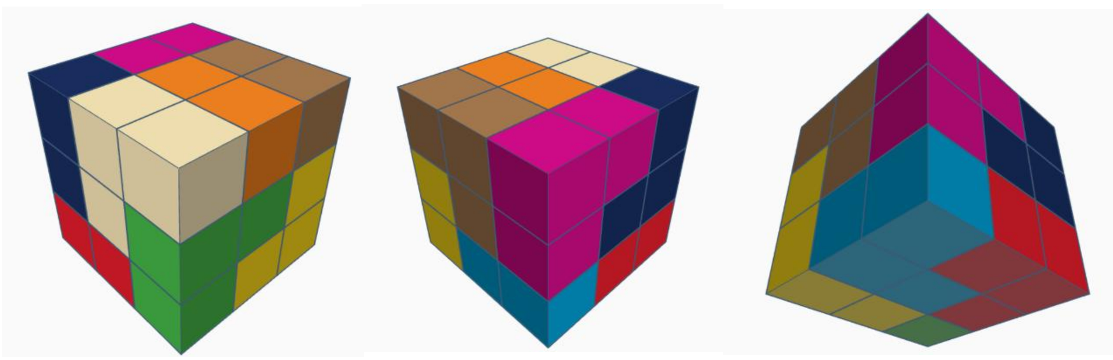
Jó munkát!

XXI. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI – <u>6. évfolyam</u>

1. Melyik az a legkisebb kocka, amely kitölthető bizonyos mennyiségű a képen látható összetett test segítségével? Mutass be egy megfelelő elrendezést is!



Megoldás. Probálgatással is rájöhetünk, hogy egy $2\times2\times2$-es kockát nem lehet kitölteni ilyen alakú testek segítségével. Ez nem véletlen, a kitöltőtest egy 3 elemből álló test, az említett kocka viszont csak 8 egységköbből áll. Mivel a 8 nem osztható 3-mal, így nem tudjuk felépíteni a képen látható test segítségével a vizsgált kockát. Fontos tehát, hogy a kitöltendő kockánk térfogatmennyisége osztható legyen 3-mal. Az első ilyen méretű kocka a $3\times3\times3$-as kocka, melynek térfogata 27 egységköb, így 9 darab testtel tudjuk kitölteni a vizsgált kockát. Egy lehetséges elrendezés:



A megoldás sokkal könnyebben ábrázolható és sokkal áttekinthetőbb a rétegek különálló bemutatásával:

alsó réteg | középső réteg | felső réteg

2. Lappföldön, a Télapó manói ügyességi versenyt rendeztek. A döntőbe jutott manók rajtszámaira pedig teljesül, hogy

- **olyan négyjegyű számok, melynek számjegyei különbözőek, tehát nincs bennük ismétlődés;**
- **a rajtszám páros prímmel kezdődik;**
- **ha elhagyjuk a rajtszám utolsó számjegyét, akkor a szám osztható lesz 5-tel;**
- **ha a rajtszám első számjegyét hagyjuk el, akkor egy 3-mal osztható háromjegyű számot kapunk;**

- **ha a rajtszám második számjegyét hagyjuk el, akkor a megmaradt háromjegyű szám 4-gyel lesz osztható.**

Hány manó került be a döntőbe?

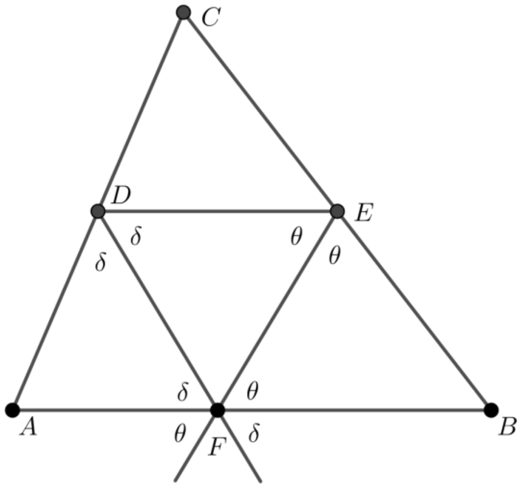
Megoldás. Jelöljük a számot $\overline{abcd}$-vel, hiszen az első feltétel szerint számjegyeiben különböző négyjegyű szám kell, hogy legyen. A második feltételből egyértelműen megállapítható, hogy $a=2$, hiszen a 2 az egyetlen páros prím. A harmadik feltételből következik, hogy a c helyén 0 vagy 5 állhat, hiszen a 0-ra vagy 5-re végződő számok oszthatóak 5-tel. Az ötödik feltétel a 4-gyel való oszthatóság, ami megköveteli, hogy a szám kétjegyű végződése osztható legyen 4-gyel. Mivel ismerjük az utolsó előtti számjegyet, így az utolsó két számjegy 00 vagy 04 vagy 08 vagy 52 vagy 56 lehetne az oszthatósági szabályok alapján, de mivel figyelembe kell vennünk, hogy a számjegyek nem ismétlődhetnek így csak a 04 vagy a 08 vagy az 56 állhat az utolsó két számjegy helyén.
Most nézzük a negyedik feltételt, ami alapján a $b+c+d$ összeg a 3 többszöröse kell, hogy legyen.
I. eset: ha $c=0$ és $d=4$, akkor $b+0+4=b+4$, amiből következik, hogy b felveheti a 2, 5 és 8 értékeket, illetve a 2-t nem, hiszen ekkor ismétlődés lépne fel a számjegyek között. Ekkor kapjuk a 2504, 2804 rajtszámokat.
II. eset: ha $c=0$ és $d=8$, akkor $b+0+8=b+8$, amiből következik, hogy b felveheti az 1, 4 és 7 értékeket. Ekkor kapjuk a 2108, 2408, 2708 rajtszámokat.
III. eset: ha $c=5$ és $d=6$, akkor $b+5+6=b+11$, amiből következik, hogy b felveheti az 1, 4 és 7 értékeket. Ekkor kapjuk a 2156, 2456, 2756 rajtszámokat.
Ez azt jelenti, hogy összesen 8 manó került be a döntőbe.

3. Határozd meg a p, q, r, s, t 100-nál kisebb, nem feltétlenül különböző prímszámokat úgy, hogy igaz legyen a $p(q+r)(s-t)=2023$ egyenlőség!

Megoldás. Bontsuk fel tényezőkre a 2023-at: $2023=7\cdot17\cdot17$. Tehát a következő egyenletet szeretnénk megoldani: $p(q+r)(s-t)=7\cdot17\cdot17$. Vizsgáljuk a következő eseteket:
I. eset. Ha $p=7$, $q+r=17$ és $s-t=17$. Mivel nem létezik két olyan prímszám, amelyek összege 17 lenne, ezért ebben az esetben nem kapunk megoldást.
II. eset. Ha $p=17$, $q+r=7$ és $s-t=17$. A $q+r=7$ egyenletből megállapíthatjuk, hogy a q és r lehetséges értékei 2 és 5 tetszőleges sorrenben. Az $s-t=17$ egyenletnek egyértelmű megoldása van, hiszen két prímszám különbsége csakis akkor lesz páratlan szám, ha az egyik prímszám a 2-es. Innen $s=19$, $t=2$. Így ebben az esetben a lehetséges megoldások: $p=17$, $q=5$, $r=2$, $s=19$, $t=2$, illetve $p=17$, $q=2$, $r=5$, $s=19$, $t=2$.
Lehetségesek még a következő felbontások: $1\cdot17\cdot119$, $1\cdot7\cdot289$ és $1\cdot1\cdot2023$, de ezek közül egyik sem ad megfelelő megoldást.

4. Legyenek D és E pontok rendre az ABC hegyesszögű háromszög AC és BC oldalainak felezőpontjai, az F pont pedig az ADE és BED szögek szögfelezőinek metszéspontja. Bizonyítsd be: ha F pont rajta van a háromszög AB oldalán, akkor a háromszögre teljesül, hogy $AB=\dfrac{AC+BC}{2}$.

Megoldás. Először is ábrázoljuk a háromszöget a szögfelezőkkel és a metszésponttal.



Jelöljük be a szögfelezőknél kapott szögeket δ-val és θ-vel. Észrevehetjük, hogy δ egyállású szög az alapháromszögön kívül eső szöggel, mely illeszkedik a szögfelező és az FB szakasz által bezárt szögre. Mindemellett ezzel a szöggel csúcsszöget alkot az AFD szög, így annak értéke is δ lesz. Ezen megállapítások után észrevehetjük, hogy az AFD háromszög egyenlő szárú háromszög, melyben AFD szög megegyezik ADF szöggel, azaz az AF oldal hosszúsága megegyezik az AD oldal hosszúságával.
Hasonló módon végigvihetjük a BFE háromszög esetén is az előző gondolatmenetet, melyből megkapjuk, hogy a $BF = BE$. Mivel a D és E pontok oldalfelező pontok, így elmondhatjuk, hogy $AD = \frac{AC}{2}$ és $BE = \frac{BC}{2}$. Innen

$$AB = AF + FB = AD + BE = \frac{AC}{2} + \frac{BC}{2},$$

tehát valóban igaz az egyenlőség.