



XXIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2025. december 7.

7. évfolyam

1. Miki bácsinak négy szép esővizes hordója van, a következő feliratokkal: Arany, Bronz, Csillógó és Dagadt. Tudjuk, hogy Csillógó és Dagadt térfogata egyenlő. Egy esős napon Arany és Bronz hordók megteltek esővízzel, a másik kettő a tető alatt üresen maradt. Miki bácsi az Aranyból teletöltötte Csillógót, így Arany hordó egyötödéig maradt az esővízből. Később a Bronzból színig töltötte a Dagadt hordót, így a Bronz hordóban csak egykilencedéig maradt esővíz. Telt, múlt az idő, a hordók kiürültek. Egy esős napon csak a Csillógó és Dagadt hordók teltek meg esővízzel. Miki bácsi ezekből akarta teletölteni Aranyat és Bronzot, de ehhez a szomszédától kellett kérnie még 9 vödör vizet. Melyik hordóba hány vödör víz fér?

2. Írd fel az összes olyan, egész számokból álló (x, y) rendezett párt, amire igaz:

$$x^2 \cdot |y| = 2025.$$

3. A P pont az $ABCD$ négyzet belső tartományának olyan pontja, amelyre az ABP háromszög szabályos. R a négyzet külső tartományában helyezkedik el úgy, hogy BCR háromszög is szabályos. Igazold, hogy D , P és R egy egyenesen vannak! (A szabályos háromszöget egyenlőoldalú háromszögnek is nevezzük.)

4. Mihály találomra felírt a táblára 5 különböző, 10-nél nagyobb prímszámot. Megkérdezte a barátját, Jánost, hogy talál-e közöttük olyan számpárt, amiknek a különbsége osztható 10-zel. János elgondolkodott és így válaszolt: a 10-nél nagyobb prímekből bármely 5-öt kiválasztva lesz ilyen számpárunk. Miért biztos ebben János? A gondolatmenetet részletesen indokold!

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XXIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI – 7. évfolyam

1. Miki bácsinak négy szép esővízes hordója van, a következő feliratokkal: Arany, Bronz, Csillógó és Dagadt. Tudjuk, hogy Csillógó és Dagadt térfogata egyenlő. Egy esős napon Arany és Bronz hordók megteltek esővízzel, a másik kettő a tető alatt üresen maradt. Miki bácsi az Aranyból teletöltötte Csillógót, így Arany hordó egyötödéig maradt az esővízből. Később a Bronzból színig töltötte a Dagadt hordót, így a Bronz hordóban csak egykilencedéig maradt esővíz. Telt, múlt az idő, a hordók kiürültek. Egy esős napon csak a Csillógó és Dagadt hordók teltek meg esővízzel. Miki bácsi ezekből akarta teletölteni Aranyat és Bronzot, de ehhez a szomszédától kellett kérnie még 9 vödör vizet. Melyik hordóba hány vödör víz fér?

Megoldás. Jelöljük a hordók térfogatát A , B , C , és D -vel. A szöveg alapján felírható:

$C = \frac{4}{5}A$, $D = \frac{8}{9}B$. Mivel $C = D$, így $\frac{4}{5}A = \frac{8}{9}B$, amiből egyszerű rendezéssel megkaphatjuk, hogy $9A = 10B$.

A szövegből az is kiderül, hogy az Arany és a Bronz hordókban maradt esővíz mennyisége épp 9 vödörnyi. Tehát $\frac{A}{5} + \frac{B}{9} = 9$. Az egyenlet mindkét oldalát 45-gyel szorozva a

$\frac{4A}{5} + \frac{4B}{9} = 36$ egyenlethez jutunk, majd a $\frac{8B}{9} + \frac{4B}{9} = 36$ helyettesítés után az egyenletből megkapjuk a $B = 27$ vödör eredményt. Innen már kiszámtható, hogy $A = 30$ vödör, $C = D = 24$ vödör a hordók térfogata.

2. Írd fel az összes olyan, egész számokból álló (x, y) rendezett párt, amire igaz:

$$x^2 \cdot |y| = 2025.$$

Megoldás. A 2025 prímtényezős alakja $2025 = 3^4 \cdot 5^2$.

Tehát $2025 = 45^2 \cdot 1 = 9^2 \cdot 25 = 3^2 \cdot 225 = 5^2 \cdot 81 = 15^2 \cdot 9 = 1^2 \cdot 2025$.

Ennek alapján 24 rendezett párt írhatunk fel:

$(45, 1)$, $(45, -1)$, $(-45, 1)$, $(-45, -1)$,
 $(9, 25)$, $(9, -25)$, $(-9, 25)$, $(-9, -25)$,
 $(3, 225)$, $(3, -225)$, $(-3, 225)$, $(-3, -225)$,
 $(5, 81)$, $(5, -81)$, $(-5, 81)$, $(-5, -81)$,
 $(15, 9)$, $(15, -9)$, $(-15, 9)$, $(-15, -9)$,
 $(1, 2025)$, $(1, -2025)$, $(-1, 2025)$, $(-1, -2025)$.

3. A P pont az $ABCD$ négyzet belső tartományának olyan pontja, amelyre az ABP háromszög szabályos. R a négyzet külső tartományában helyezkedik el úgy, hogy BCR háromszög is szabályos. Igazold, hogy D , P és R egyenesen vannak! (A szabályos háromszöget egyenlőoldalú háromszögnek is nevezzük.)

Megoldás.

Legyen az adott négyzet oldala a .

A D , P és R pontok akkor vannak egyenesen, ha a $\angle DPR = 180^\circ$.

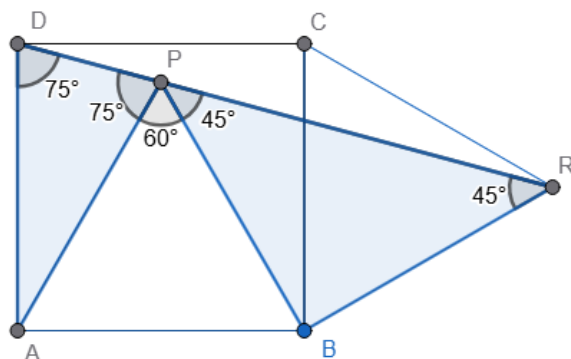
Mivel az ABP háromszög egyenlőoldalú, az $\angle APB = 60^\circ$.

Figyeljük meg a PBR háromszöget: $\angle PBR = 90^\circ$, $BP = BR = a$. Tehát ez egy egyenlőszárú derékszögű háromszög. Ezért $\angle BPR = 45^\circ$.

ADP háromszög szintén egyenlőszárú ($AD = AP = a$), aminek a szárai 30° -ot zárnak be egymással, ezért az alapon fekvő $\angle DPA = 75^\circ$.

A fent leírtak szerint a $\angle DPR = 75^\circ + 60^\circ + 45^\circ = 180^\circ$.

Tehát a három pont egyenesre esik.



4. Mihály találomra felírt a táblára 5 különböző, 10-nél nagyobb prímszámot. Megkérdezte a barátját, Jánost, hogy talál-e közöttük olyan számpárt, amiknek a különbsége osztható 10-zel. János elgondolkodott és így válaszolt: a 10-nél nagyobb prímekből bármely 5-öt kiválasztva lesz ilyen számpárunk. Miért biztos ebben János? A gondolatmenetet részletesen indokold!

Megoldás. Két szám különbsége akkor osztható 10-zel, ha az utolsó számjegyük megegyezik. A 10-nél nagyobb prímek nem végződnek páros számjegyre (mert akkor oszthatóak lennének kettővel), sem 5-re (mert akkor 5-tel lennének oszthatóak). Így az utolsó számjegyük 1, 3, 7 vagy 9. Tehát, ha kiválasztunk 5, tíznél nagyobb prímet, a skatulyaelv szerint biztosan lesz közöttük két olyan szám, amelyeknek az utolsó számjegye megegyezik. Az ő különbségük osztható 10-zel.