



XXIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2025. december 7.

8. évfolyam

1. Hány olyan kétjegyű pozitív szám létezik, amelynek pontosan 12 osztója van?

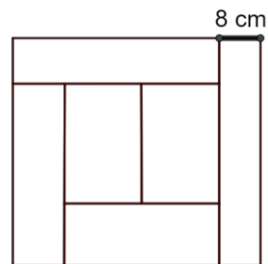
2. Mickó és Fickó, a két geometriában járatos eb, 6 illetve 3 m hosszú láncsal van megkötve, egymástól 7 m távolságra. Mindkét kutya csak azt a területet őrzi, ameddig a saját láncsa elér, de a másik kutyáé már nem. Mickó kiszimatolja, hogy neki nagyobb területet kell őrizzie, ezért elhatározza, hogy minden 1 méter sugarú kör területének megfelelő többletért 1 kutyaropit kér Fickótól. Hány kutyaropit követel Mickó Fickótól?

3. Anna kertjében nőtt egy különleges gyom. Valahányszor kitépi, a helyén pontosan két növény nőhet:

- vagy két gyom,
- vagy egy gyom és egy szép virág,
- vagy két szép virág.

Anna addig tépkedte a gyomokat, amíg egy sem maradt. Ekkor a kertjében pontosan 2025 szép virág pompázott. Hány gyomot tépett ki Anna?

4. Határozd meg az ábrán látható négyzet területét, ha ismert, hogy hat egyenlő területű téglalapra daraboltuk, amelyek közül egyik téglalap (jelölt) rövidebb oldala 8 cm.



A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XXIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI – 8. évfolyam

1. Hány olyan kétjegyű pozitív szám létezik, amelynek pontosan 12 osztója van?

Megoldás. Mivel az osztók számát a szám prímtényezős felbontásában szereplő kitevők eggyel növelt értékeinek szorzata adja, így meg kell vizsgálni, hogy a 12 hogyan állhat elő szorzat alakban: $12 = 12 \cdot 1 = 6 \cdot 2 = 4 \cdot 3 = 3 \cdot 2 \cdot 2$.

Ekkor a kétjegyű szám prímtényezős alakja ilyen lehet: p^{11} , p^5q , p^3q^2 , p^2qr .

- Az első esetben 2^{11} is már négyjegyű, így ez nem lehet a keresett szám.
- A második esetben egyedül a 2 ötödik hatványa kétjegyű, ennek háromszorosa, 96 is még épphogy kétjegyű.
- A harmadik esetben $2^3 \cdot 3^2 = 72$ megfelelő, de $2^2 \cdot 3^3 = 108$ és $2^3 \cdot 5^2 = 200$ már nem.
- A negyedik esetben először a három legkisebb prímmel variálva a lehetséges kitevőket, két jó megoldást kapunk: $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 60$ és $2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 90$. Ha a 2 kitevője a 2, akkor megpróbálhatunk még nagyobb prímeket is találni mellé, így kapjuk még a $2^2 \cdot 3^1 \cdot 7^1 = 84$ megoldást. Más prímelek esetén túl nagy számokat kapunk.

Összesen 5 ilyen szám van, ezek: 60, 72, 84, 90 és 96.

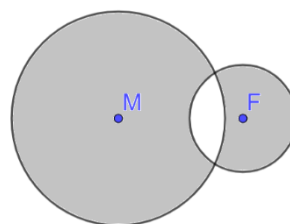
2. Mickó és Fickó, a két geometriában járatos eb, 6 illetve 3 m hosszú láncsal van megkötve, egymástól 7 m távolságra. Mindkét kutya csak azt a területet őrzi, ameddig a saját láncá elér, de a másik kutyaé már nem. Mickó kiszimatolja, hogy neki nagyobb területet kell őrizznie, ezért elhatározza, hogy minden 1 méter sugarú kör területének megfelelő többletért 1 kutyaropit kér Fickótól. Hány kutyaropit követel Mickó Fickótól?

Megoldás. Jelölje a két kör közös részének területét T , a két 'félhold' alakú rész területét pedig T_1 , illetve T_2 , $T_1 < T_2$.

Ekkor a keresett különbség a kör területképlete alapján:

$$T_2 - T_1 = (T_2 + T) - (T_1 + T) = 6^2 \pi - 3^2 \pi = 27 \pi \text{ m}^2.$$

Ez a terület 27 db 1 m sugarú kör területének felel meg. Mickó tehát 27 kutyaropit követel Fickótól.



3. Anna kertjében nőtt egy különleges gyom. Valahányszor kitépi, a helyén pontosan két növény nőhet:

- vagy két gyom,
- vagy egy gyom és egy szép virág,
- vagy két szép virág.

Anna addig tépkedte a gyomokat, amíg egy sem maradt. Ekkor a kertjében pontosan 2025 szép virág pompázott. Hány gyomot tépett ki Anna?

Megoldás. Kezdetben pontosan egy növény volt a kertben (egy gyom), végezetül pedig pontosan 2025 növény (2025 szép virág) és bármelyik lépést tekintjük, mindegyikben (azaz minden egyes gyom kicsupálásakor) a növények száma pontosan eggyel növekedett. Ez azt jelenti, hogy 2024 lépés volt, vagyis Anna 2024 gyomot tépett ki a kertjéből.

4. Határozd meg az ábrán látható négyzet területét, ha ismert, hogy hat egyenlő területű téglalapra daraboltuk, amelyek közül egyik téglalap (jelölt) rövidebb oldala 8 cm.

Megoldás. Vegyük észre, hogy a két belső téglalap egymással egybevágó. Jelöljük oldalait a -val és b -vel.

Mivel a téglalapok területei egyenlők, az ábrán látható módon minden téglalap oldalait ki tudjuk fejezni a -val és b -vel. Így végül a

$\frac{8a}{15} = 8$ egyenlethez jutunk, amelynek megoldása $a = 15$ cm. A négyzet

oldala tehát $\frac{8 \cdot 15}{3} + 8 = 48$ cm, a területe pedig 2304 cm^2 .

