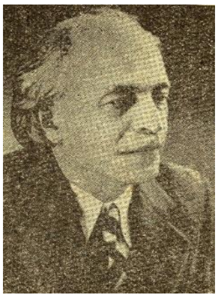


XIX. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2021. december 3.

9. évfolyam

1. Felírtuk a táblára a természetes számokat 1-től 10-ig. Egy lépésben kiválasztunk két számot, és elosztjuk őket egymással úgy, hogy a hányados legalább 1 legyen. A két kiválasztott számot letöröljük, és helyette felírjuk a hányados egész részét. (Például $7:2=3{,}5$, a 7-est és a 2-est letöröljük, és fölírjuk a 3-ast.) Legfeljebb mekkora lehet az utolsónak megmaradt szám?

2. Ha összeadjuk két egész szám összegét, különbségét, szorzatát és hányadosát, eredményül 500-at kapunk. Melyik lehet ez a két szám?

3. Legyen K, L, M és N pont rendre az $ABCD$ tetszőleges négyszög AB, BC, CD és DA oldalának felezőpontja. Bizonyítsuk be, hogy a KM és LN szakaszok P metszéspontja egyben mindkét szakasznak felezőpontja is!

4. Hányféleképpen lehet kiszínezni négy színnel az $ABCDE$ szabályos ötszög csúcsait, ha két szomszédos csúcs nem lehet azonos színű? (Két színezés különbözőnek számít, ha van olyan csúcs, amelyik színe különbözik a két színezésben.)

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XIX. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI – 9. évfolyam

1. Felírtuk a táblára a természetes számokat 1-től 10-ig. Egy lépésben kiválasztunk két számot, és elosztjuk őket egymással úgy, hogy a hányados legalább 1 legyen. A két kiválasztott számot letöröljük, és helyette felírjuk a hányados egész részét. (Például $7:2=3,5$, a 7-est és a 2-est letöröljük, és fölírjuk a 3-ast.) Legfeljebb mekkora lehet az utolsónak megmaradt szám?

Megoldás: Mivel a hányados legalább egy, így mindig a kiválasztott számok nagyobbikát osztjuk el a kisebbel. Az a és b szám osztásakor, mivel b legalább egy, így a hányados legfeljebb a lehet, vagyis ha kiválasztok két számot, a legjobb esetben a maximumukat tudom a helyükbe írni. A tíz szám maximuma 10, így végül legfeljebb 10-et kaphatok. És ez valóban meg is kapható: Töröljük le először a 2-3, 4-5, 6-7, 8-9 párokat. Ekkor a következő számok maradnak: $1,1,1,1,10$. Most a 10-et osszuk el sorban az 1-esekkel. Így elértük, hogy utolsó számnak a 10-es maradjon.

2. Ha összeadjuk két egész szám összegét, különbségét, szorzatát és hányadosát, eredményül 500-at kapunk. Melyik lehet ez a két szám?

Megoldás: A két szám legyen x és y. Nyilván $y \neq 0$, hiszen az y-nal osztani is kell. Ekkor $(x+y)+(x-y)+xy+x:y=500$, azaz $2x+xy+x:y=500$. Innen kiemeléssel kapjuk: $x\left(2+y+\frac{1}{y}\right)=500$. Mivel az x egész szám, így a zárójeles kifejezés is egész, azaz a tört miatt $y=\pm1$. Ha $y=1$, akkor $x=125$. $y=-1$ esetén nem kapunk megoldást. A továbbiakban föltesszük, hogy $y\neq-1$. Ebben az esetben a szorzat csak úgy lehet egész szám, ha az x szorzó leegyszerűsíti az y-t, azaz $x=ky$, ahol k egész szám. Ekkor

$$ky\left(2+y+\frac{1}{y}\right)=500 \Leftrightarrow ky\frac{2y+y^2+1}{y}=500 \Leftrightarrow k(y+1)^2=500.$$

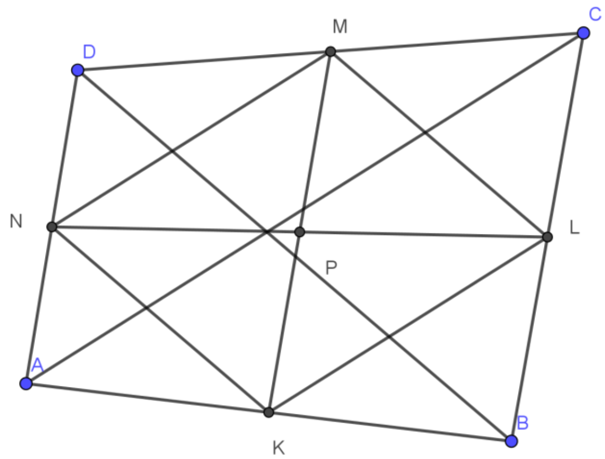
A bal oldal második tényezője miatt keressük az 500 négyzetszám osztóit: 1, 4, 25, 100. További próbálkozásainkat foglaljuk össze egy táblázatba:

$(y+1)^2$	1	1	4	4	25	25	100	100
$y+1$	1	–1	2	–2	5	–5	10	–10
y	0 nem lehet	–2	1 már volt	–3	4	–6	9	–11
k		500	125	125	20	20	5	5
x		–1000	125	–375	80	–120	45	–55

A megoldások tehát: $(-1000;-2)$, $(125;1)$, $(-375;-3)$, $(80;4)$, $(-120;-6)$, $(45;9)$, $(-55,-11)$.

3. Legyen K, L, M és N pont rendre az $ABCD$ tetszőleges négyszög AB, BC, CD és DA oldalának felezőpontja. Bizonyítsuk be, hogy a KM és LN szakaszok P metszéspontja egyben mindkét szakasznak felezőpontja is!

Megoldás: Felhasználva azt az ismert tételt, amely szerint minden paralelogramma átlói felezik egymást, elegendő belátni, hogy a $KLMN$ négyszög paralelogramma. Ehhez elegendő megmutatnunk, hogy a $KLNM$ négyszög szemközti oldali párhuzamosak.



Az MN szakasz párhuzamos az AC szakasszal, mivel az MN az ACD háromszög középvonala. Hasonlóan belátható, hogy az LK szakasz ugyancsak párhuzamos az AC szakasszal, így az MN szakasz is párhuzamos az LK szakasszal. Hasonlóan bizonyítható ML és NK párhuzamossága is. Mivel a $KLMN$ négyszög szemközti oldalai párhuzamosak, ezért ez a négyszög paralelogramma, és így átlói felezik egymást.

4. Hányféleképpen lehet kiszínezni négy színnel az $ABCDE$ szabályos ötszög csúcsait, ha két szomszédos csúcs nem lehet azonos színű? (Két színezés különbözőnek számít, ha van olyan csúcs, amelyik színe különbözik a két színezésben.)

Megoldás: Különböztessünk meg három esetet.
I. Az A és a C csúcs azonos színű.
II. Az A és a C csúcs nem azonos színű, de A és D igen.
III. Az A és C csúcs nem azonos színű, és A és D sem.
Az I. esetben A és C négyféleképpen színezhető, B háromféleképpen, D háromféleléppen és E kétféleképpen (mivel két szomszédja különböző színű). Ez összesen $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 72$.
A II. esetben A és D négyféleképpen színezhető, B háromféleképpen, C kétféleképpen és E háromféleképpen, ami összesen $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 72$.
A III. esetben A négyféleképpen színezhető, B háromféleképpen, C kétféleképpen (mivel az A színét sem veheti föl), D kétféleképpen (hasonló okból kifolyólag, mint C) és E is kétféleképpen színezhető: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 96$.
A válasz: $72 + 72 + 96 = 240$ módon lehet kiszínezni a csúcsokat a feltétel szerint.