XVIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2021. január 29.

12. évfolyam

1. Bizonyítsd be, hogy minden x valós számra teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$x^4+7x^2+2>4x^3+2x.$$

2. Egy derékszögű háromszög befogói fölé kívülről négyzeteket rajzoltunk. Mutasd meg, hogy a háromszög köré írható köre átmegy a négyzetek legtávolabbi csúcsait összekötő szakasz felezőpontján!

3. Jelölje $s(n)$ az n természetes szám számjegyeinek szorzatát. Létezik-e olyan n amelyre $s(n)=n^2-21n-40$?

4. Határozd meg a 7^{2020} szám utolsó 4 számjegyét!

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XVIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI – 12. évfolyam

1. Bizonyítsd be, hogy minden x valós számra teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$x^4+7x^2+2>4x^3+2x.$$

Megoldás: Rendezéssel a következőket kapjuk:

$$x^4+7x^2+2>4x^3+2x$$

akkor és csakis akkor ha

$$x^4-4x^3+7x^2-2x+2>0,$$

azaz

$$x^4-4x^3+6x^2-4x+1+x^2+2x+1=\left(x-1\right)^4+\left(x+1\right)^2>0,$$

ahol mindig érvényes a szigorú egyenlőtlenség, hiszen a kapott negyedik hatvány és négyzet sosem egyenlőek egyszerre 0-val.

2. Egy derékszögű háromszög befogói fölé kívülről négyzeteket rajzoltunk. Mutasd meg, hogy a háromszög köré írható köre átmegy a négyzetek legtávolabbi csúcsait összekötő szakasz felezőpontján.

Megoldás: Legyen adott a derékszögű *ABC* háromszög, ahol a *C* csúcsnál lévő szög derékszög. Legyen a *k* kör a háromszög köré írható köre. Legyenek *CBEF* és *ACGH* az említett négyzetek, legyen az *I* pont az *EH* szakasz felezőpontja, valamint legyen a *J* pont a *C* pont tükörképe a *k* kör középpontjához viszonyítva. Könnyen belátható, hogy a $CIJ\angle$ derékszög, valamint, hogy a $JEH\angle$ és a $JHE\angle$ nagysága $45°$. Innen következik, hogy a *JEH* háromszög egyenlőszárú, amelyben a *JI* nem csak magasság, hanem egyben súlyvonal is.

3. Jelölje $s(n)$ az n természetes szám számjegyeinek szorzatát. Létezik-e olyan n amelyre $s(n)=n^2-21n-40$?

Megoldás: Mivel az $n^2-21n-40$ másodfokú függvénynek két nullahelye van, amelyek közül az egyik negatív, a másik pedig egy 22 és 23 közötti szám, megállapíthatjuk, hogy $n\geq 23$. Ugyanakkor, mivel minden n természetes számra teljesül, hogy $s(n)\leq n$, megállapíthatjuk, hogy $n^2-21n-40\leq n$, azaz $n^2-22n-40\leq 0$. Innen következik viszont, hogy $n\leq 23$. Azaz, az egyedüli lehetséges megoldás az $n=23$, amelyre valóban teljesülnek a feladat feltételei.

4. Határozd meg a 7^{2020} szám utolsó 4 számjegyét!

Megoldás: Vegyük észre, hogy $7^4=2401$. Érvényes a következő egyenlőség:

$$7^{2020}=\left(7^4\right)^{505}=2401^{505}=\left(1+2400\right)^{505}=1+505\cdot 1\cdot 2400+\binom{505}{2}\cdot 1\cdot 5760000+\ldots$$

Vegyük észre, hogy az utolsó kiírt tag, valamint az őt követő összes tag mindig legalább 4 nullára végződik, azaz nincsenek kihatással a keresett szám négyjegyű végződésére. A keresett négyjegyű végződés tehát megegyezik az $1+505\cdot 1\cdot 2400$ szám négyjegyű végződésével, amely 2001.