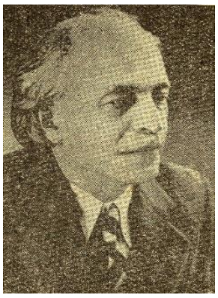


XVIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2021. január 29.

9. évfolyam

1. Egy 4×4-es táblázat mindegyik mezőjébe beírjuk az 1, 2, 3 számok valamelyikét.
a) Elérhető-e így, hogy minden sorban és minden oszlopban különbözzön a számok összege?
b) Elérhető-e így, hogy minden sorban, minden oszlopban és mindkét átlóban különbözzön a számok összege?

2. Az $ABCD$ négyzet CD oldalán fölveszünk egy tetszőleges L pontot. Az A csúcsból és a C csúcsból is merőleges egyeneseket bocsátunk a BL szakaszra, így kapjuk rendre a P és Q metszéspontokat. Igazoljuk, hogy $CP = DQ$.

3. Határozzuk meg azokat a természetes számokat, amelyek négyzetének a végződése ugyanaz a kétjegyű szám, mint magának az eredeti számnak?

4. Tekintsük a mellékelt ábrán látható végtelen számháromszöget, amelyben a páratlan természetes számokat láthatjuk fölsorolva emelkedő sorrendben.
a) Melyik szám áll a 100. sor végén?
b) Mennyi a 100. sorban álló számok összege?
c) Mennyi az első 100 sorban álló összes szám összege?

1
3 5
7 9 11
13 15 17 19
... ...

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XVIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI – 9. évfolyam

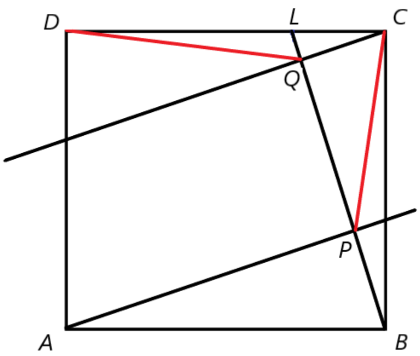
1. Egy 4×4-es táblázat mindegyik mezőjébe beírjuk az 1, 2, 3 számok valamelyikét.
a) Elérhető-e így, hogy minden sorban és minden oszlopban különbözzön a számok összege?
b) Elérhető-e így, hogy minden sorban, minden oszlopban és mindkét átlóban különbözzön a számok összege?

Megoldás: a) Igen, elérhető. Egy ilyen kitöltést mutat az alábbi ábra. A sorok végén a sorösszegek, az oszlopok alatt pedig az oszlopösszegek láthatók.

1	1	1	2	5
1	1	2	2	6
2	3	3	3	11
3	3	3	3	12
7	8	9	10	

b) Nem lehet. A legkisebb szám, ami összegként kijöhet 1 + 1 + 1 + 1 = 4, a legnagyobb pedig 3 + 3 + 3 + 3 = 12. Ez összesen 9 szám. Ugyanakkor a négy-négy oszlop- és sorösszeg, valamint a két átló összege összesen 10 féle számot jelent. Nyilvánvaló, hogy nem lehet mind a 10 összeg különböző, ha csak 9 féle összeg jöhet ki.

2. Az $ABCD$ négyzet CD oldalán fölveszünk egy tetszőleges L pontot. Az A csúcsból és a C csúcsból is merőleges egyeneseket bocsátunk a BL szakaszra, így kapjuk rendre a P és Q metszéspontokat. Igazoljuk, hogy $CP = DQ$.



Megoldás: Tekintsük a BAP és a CBQ háromszöget.
$AB = BC$, mert a négyzet oldalai egyenlők;
$APB\angle = BQC\angle = 90°$ a feltételek miatt;
$ABP\angle = BCQ\angle$, mert merőleges szárú konvex szögek;
ebből következik, hogy BAP háromszög és CBQ háromszög egybevágó (két oldal és a nagyobbikkal szemközti szögek egyenlők). Így $BP = CQ$.
Tekintsük most a BCP és a CDQ háromszöget.
$BC = CD$, mert a négyzet oldalai egyenlők;
$BP = CQ$, az imént bizonyítottuk be;
$CBP\angle = DCQ\angle$, mert konvex váltószögek; ebből következik, hogy a BCP és a CDQ háromszögek egybevágók (két oldaluk és a közre zárt szögük egyenlő), amiből következik a bizonyítandó állítás: $CP = DQ$.

3. Határozzuk meg azokat a természetes számokat, amelyek négyzetének a végződése ugyanaz a kétjegyű szám, mint magának az eredeti számnak?

Megoldás: Ha a feltételek teljesülnek, akkor $100 \mid \left(a^2 - a\right)$ azaz $a \cdot (a-1) = 100k = 4 \cdot 25 \cdot k$. Mivel $(a, a-1) = 1$, ezért $25 \mid a$ és $4 \mid (a-1)$, vagy $25 \mid (a-1)$ és $4 \mid a$, vagy $100 \mid a$, illetve $100 \mid (a-1)$.

Az első esetben az a szám végződése 00, 25, 50 vagy 75 lehet, de ezek közül csak a 25-tel végződőek felelnek meg.
A második esetben az $a-1$ szám végződése 00, 25, 50 vagy 75 lehet, de ezekből csak azok felelnek meg, amikor $a-1$ 75-re végződik, azaz az a szám végződése 76.
A harmadik esetben a 00 végződőek felelnek meg.
A negyedik esetben a 01-re végződőek felelnek meg.

4. Tekintsük a mellékelt ábrán látható végtelen számháromszöget, amelyben a páratlan természetes számokat láthatjuk fölsorolva emelkedő sorrendben.
a) Melyik szám áll a 100. sor végén?
b) Mennyi a 100. sorban álló számok összege?
c) Mennyi az első 100 sorban álló összes szám összege?

1
3 5
7 9 11
13 15 17 19
... ...

Megoldás: a) Vegyük észre, hogy minden sorban annyi szám van, ahányadik sort nézzük. Így az első sorban 1, a második sorban 2, a harmadik sorban 3 szám van és így tovább. Az első 100 sorban összesen $1+2+3+\dots+100 = \frac{100 \cdot (100+1)}{2} = 5050$. Ezek szerint a 100. sor végén az 5050. páratlan szám áll. Mivel az *n*-edik páratlan számot úgy kapjuk meg, hogy az *n* kétszereséből kivonunk egyet, így az 5050. páratlan szám a 10 099.

b) Ha a 100. sorban 100 páratlan szám áll, és a sor végén a 10 099 áll, akkor ennek a sornak a számait csökkenő sorrendben a következőképpen írhatjuk:

$10099,\ 10099-2,\ 10099-2\cdot 2,\ 10099-3\cdot 2,\ 10099-4\cdot 2,\ \dots,\ 10099-99\cdot 2.$

Jelöljük ezen számok összegét *S*-sel. Ekkor

$$S = 10099 + 10099 - 2 + 10099 - 2\cdot 2 + 10099 - 3\cdot 2 + 10099 - 4\cdot 2 + \dots + 10099 - 99\cdot 2 =$$

$$= 100\cdot 10099 - 2\cdot(1+2+3+\dots+99) = 100\cdot 10099 - 2\cdot \frac{(1+99)\cdot 99}{2} =$$

$$= 100\cdot 10099 - 100\cdot 99 = 100\cdot(10099-99) = 100\cdot 10000 = 1000000.$$

c) Tudjuk, hogy az első 100 sorban összesen 5050 páratlan szám van, így ezeknek kell venni az összegét: $1+3+5+7+9+\dots+10099$. Adjunk mindegyik taghoz egyet, amit a végén vonjunk is ki:

$$2+4+6+8+\dots+10100-5050 = 2\cdot(1+2+3+4+\dots+5050) - 5050 =$$

$$= 2\cdot\frac{(1+5050)\cdot 5050}{2} - 5050 = 5050 + 5050\cdot 5050 - 5050 = 5050\cdot 5050 = 25502500.$$