XIV. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2016. december 3.

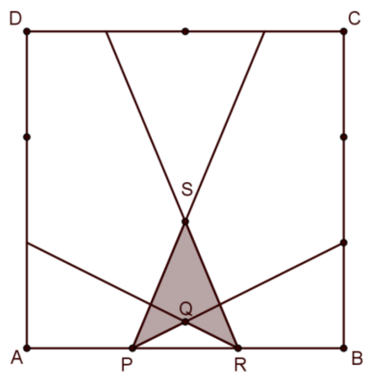
8. évfolyam

1. Pista leírt egy számsorozatot, amelynek első három tagja: 1, 0, 2**. A következő tagot úgy kapta meg, hogy az előző kettőt összeszorozta** $(0 \cdot 2)$**, majd a kapott szorzathoz hozzáadta a közvetlenül előttük lévőt:** $0 \cdot 2 + 1 = 1$**. Ekkor a sorozat már négytagú lett:** 1, 0, 2, 1**. Majd folytatta ennek a szabálynak az alkalmazását mindaddig, amíg el nem jutott a sorozat** 2016. **tagjáig. Vajon a** 2016. **tag páros vagy páratlan szám?**

2. Az $x < y < z < t < s$ **az öt legkisebb egymást követő természetes szám, melyek rendre oszthatóak** 7**-tel,** 6**-tal,** 5**-tel,** 4**-gyel és** 3**-mal. Melyek ezek a számok?**

3. Fekete Kalóz kapitány és legénysége hosszas küzdelem után elfoglalt egy kereskedőhajót. A hajón talált arannyal teli kincsesláda tartalmának harmadát Fekete Kalóz kapitány megtartotta magának. A többit szétosztotta a legénység tagjai között. A rangidős kapott 20 **aranyat és a maradék tizedét, a következő** 40 **aranyat és a maradék tizedét, a harmadik** 60 **aranyat és a maradék tizedét és így tovább. Így a legénység tagjai mind ugyanannyi aranyat kaptak. Összesen hány kalóz élte túl a küzdelmet és osztozott a kincsen? Mennyi arany volt a ládában?**

4. Az ***ABCD*** **négyzet három oldalát három, a negyediket pedig négy egyenlő részre osztottuk, majd a megfelelő pontok összekötésével megkaptuk a satírozott** ***PQRS*** **négyszöget. Határozd meg a satírozott és a nem satírozott terület arányát!**



A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XIV. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
MEGOLDÁSOK – 8. évfolyam

1. Pista leírt egy számsorozatot, amelynek első három tagja: 1, 0, 2**. A következő tagot úgy kapta meg, hogy az előző kettőt összeszorozta (**$0\cdot 2$**), majd a kapott szorzathoz hozzáadta a közvetlenül előttük lévőt:** $0\cdot 2+1=1$**. Ekkor a sorozat már négytagú lett:** 1, 0, 2, 1**. Majd folytatta ennek a szabálynak az alkalmazását mindaddig, amíg el nem jutott a sorozat** 2016. **tagjáig. Vajon a** 2016. **tag páros vagy páratlan szám?**

Megoldás: Konkrét számok helyett számoljuk azok paritásával: Jelölje n a páratlan, s pedig a páros számokat. Ekkor a sorozat első három tagját így írhatjuk föl: n,s,s. A 4. tag: $s\cdot s+n=s+n=n$. Az első négy tag így: n,s,s,n. Az ötödik tag: $s\cdot n+s=s+s=s$. Az első öt tag: n,s,s,n,s. A hatodik tag: $n\cdot s+s=s+s=s$. Így az első hat tag: n,s,s,n,s,s. Mivel a sorozatképzési szabály csak a legutolsó 3 tagot veszi figyelembe, és az utolsó három tag megegyezik azzal a három taggal, amely a 3. tag képzése után volt utolsó három, így a további tagok is úgy folytatódnak, ahogyan a sorozat a 4. tagtól folytatódik. Ezt a gondolatmenetet megismételve kapjuk a következő sorozatot: $n,s,s,n,s,s,n,s,s,n,s,s,\ldots$.
A sorozatban azokon a sorszámú helyeken, amelyek hárommal oszthatóak, s áll. Ilyen szám a 2016 is, így a 2016. helyen is s áll.

2. Az $x<y<z<t<s$ **az öt legkisebb egymást követő természetes szám, melyek rendre oszthatóak** 7**-tel,** 6**-tal,** 5**-tel,** 4**-gyel és** 3**-mal. Melyek ezek a számok?**

Megoldás: Ha x osztható 7-tel, akkor $x+7$ is osztható 7-tel. Ha y osztható 6-tal, akkor $y+6$ is osztható 6-tal, és így tovább. Mivel

$$x+7=y+6=z+5=t+4=s+3,$$

ezért $x+7$ osztható 7-tel, 6-tal, 5-tel, 4-gyel és 3-mal. A legkisebb ilyen szám a

$$3\cdot 4\cdot 5\cdot 7=420,$$

tehát az x értéke 413. A keresett számok tehát: $413<414<415<416<417$.

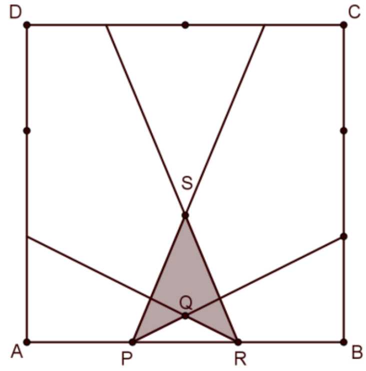
3. Fekete Kalóz kapitány és legénysége hosszas küzdelem után elfoglalt egy kereskedőhajót. A hajón talált arannyal teli kincsesláda tartalmának harmadát Fekete Kalóz kapitány megtartotta magának. A többit szétosztotta a legénység tagjai között. A rangidős kapott 20 **aranyat és a maradék tizedét, a következő** 40 **aranyat és a maradék tizedét, a harmadik** 60 **aranyat és a maradék tizedét és így tovább. Így a legénység tagjai mind ugyanannyi aranyat kaptak. Összesen hány kalóz élte túl a küzdelmet és osztozott a kincsen? Mennyi arany volt a ládában?**

Megoldás: A legénység x aranypénzen osztozik. Az első két kalóz ugyanannyi aranyat kapott, ezért felírható, hogy:

$$20+\frac{x-20}{10}=40+\frac{x-60-\frac{x-20}{10}}{10},$$

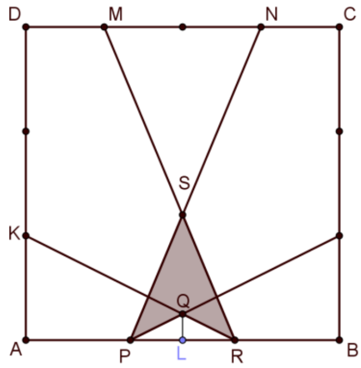
ahonnan $x=1620$. Az első két matróz 180 aranyat kapott, így a többiek is ennyit, azaz 9-en osztoztak a 1620 aranyon. A kapitány is él, és ő 810 aranyat zsebelt be. Tízen élték túl a küzdelmet és összesen 2430 aranyat találtak.

4. Az *ABCD* négyzet három oldalát három, a negyediket pedig négy egyenlő részre osztottuk, majd a megfelelő pontok összekötésével megkaptuk a satírozott *PQRS* négyszöget. Határozd meg a satírozott és a nem satírozott terület arányát!



Megoldás: Legyen a négyzet oldala a. A PRS és SNM háromszögek egyenlő szárúak és az S csúcsnál lévő szögeik egybevágóak, ezért a két háromszög hasonló. Magasságaik aránya egyenlő az alapjaik arányával, ami $3:2$. Innen következik, hogy a PRS háromszög magassága $\frac{2a}{5}$. A Q pontból merőlegest húzunk az AB oldalra. Az így kapott QLR háromszög hasonló a KAR háromszöggel, hiszen mindkettő derékszögű és az R csúcsnál lévő szögük közös. Oldalaik aránya $1:4$. Innen következik, hogy a PRQ háromszög magassága $\frac{a}{12}$. A satírozott terület nagysága:

$$T_s = \frac{a}{3}\cdot\frac{2a}{5}\cdot\frac{1}{2}-\frac{a}{3}\cdot\frac{a}{12}\cdot\frac{1}{2}=\frac{a^2}{15}-\frac{a^2}{72}=\frac{19a^2}{360}.$$



A fehér terület nagysága:

$$T_f = a^2 - T_s = \frac{341a^2}{360},$$

a keresett arány pedig: $\frac{19}{341}$.