



XXIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2025. december 7.

12. évfolyam

1. Határozd meg az n pozitív egész szám összes olyan lehetséges értékét, amelyre igaz, hogy létezik olyan konvex n -szög, amely hézag- és átfedésmentesen lefedhető olyan (nem feltétlen egybevágó) derékszögű háromszögekkel, amelyeknek hegyesszögei 30 illetve 60 fokosak!
2. Mutasd meg, hogy minden természetes szám előállítható végtelen sokféle módon $\pm 1^2 \pm 2^2 \pm \dots \pm m^2$ alakban, ahol m szintén természetes szám!
3. Bizonyítsd be, hogy legalább négy különböző elemre van szükség egy olyan végtelen sorozat előállításához, amelynek bármely két szomszédos, azonos hosszúságú részsorozatára igaz, hogy nem kapható meg egyikből a másik az elemek permutálásával! Részsorozat alatt a sorozat néhány egymást követő elemét értjük. Két részsorozat szomszédos, ha az első részsorozat utolsó eleme valamint a második részsorozat első eleme az eredeti sorozat egymást követő elemei.
4. Határozd meg az összes olyan számrendszert, amelyben a 3806130 szám négyjegyű palindrom! (Megjegyzés: $3806130 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17^2 \cdot 439$, valamint $\sqrt[4]{3806130} \approx 44,17$ és $\sqrt[3]{3806130} \approx 156,13$.)

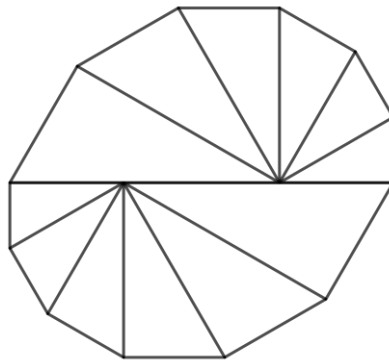
A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XXIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI – 12. évfolyam

1. Határozd meg az n pozitív egész szám összes olyan lehetséges értékét, amelyre igaz, hogy létezik olyan konvex n -szög, amely hézag- és átfedésmentesen lefedhető olyan (nem feltétlen egybevágó) derékszögű háromszögekkel, amelyeknek hegyesszögei 30 illetve 60 fokosak!

Megoldás. Az n pozitív egész szám felvehet minden értéket 3 és 12 között. Megmutatjuk először, hogy 12-nél több nem lehet. A rendelkezésre álló háromszög minden szögének mértéke osztható 30-cal, emiatt a kapott konvex n -szög minden szögének mértéke is a 30 szám egy többszöröse kell, hogy legyen. A konvexitás miatt, a kapott sokszög minden szöge 180° -nál kisebb. A legnagyobb ilyen szög a 150° . Ha minden szög eléri ezt az értéket, akkor egy 12-szögről van szó. A következő ábra szemlélteti, hogy létezik olyan 12-szög amely valóban előállítható (több konstrukció is lehetséges).



Ezt a sokszöget úgy kaptuk, hogy egy adott megfelelő derékszögű háromszöghöz (a mellékelt ábrán az egyik legkisebbhez) hozzáillesztettük a következő derékszögű háromszöget úgy, hogy annak hosszabb befogója pontosan az eredeti háromszög átfogóján fekszen. Ezt ismételtük addig, amíg az összeillesztésnél egyenesszög nem keletkezett. Ezt követően pedig az egész alakzatot középpontosan tükröztük a felső szakasz középpontjára nézve. Ez a leírás egyben megmutatja, hogy (többek között) hogyan kaphatjuk meg n -re a 3-tól 7-ig terjedő értékeket. Hátramaradt a 8-tól 11-ig terjedő értékek lefedése. Ezeket is elő tudjuk állítani (csökkenő sorrendben) a bemutatott 12-szögben szereplő sorban minden második háromszög „megfordításával”.

2. Mutasd meg, hogy minden természetes szám előállítható végtelen sokféle módon $\pm 1^2 \pm 2^2 \pm \dots \pm m^2$ alakban, ahol m szintén természetes szám!

Megoldás. Először azt bizonyítjuk be, hogy bármely természetes szám felírható a kívánt alakban. Egyszerű számítással adódik, hogy $1 = 1^2$, $2 = -1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2$, $3 = -1^2 + 2^2$ és $4 = -1^2 - 2^2 + 3^2$. Így elegendő azt megmutatni, hogy ha az állítás igaz egy k természetes számra, akkor igaz lesz a $k + 4$ számra is. Ez a lépés adódik az

$$(m+1)^2 - (m+2)^2 - (m+3)^2 + (m+4)^2 = 4$$

azonosság használatával.

Az azonosságból következik egy újabb azonosság:

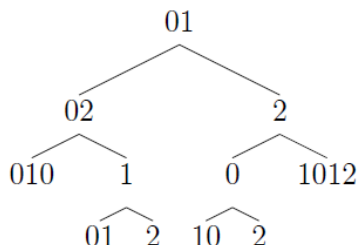
$$(m+1)^2 - (m+2)^2 - (m+3)^2 + (m+4)^2 - (m+5)^2 + (m+6)^2 + (m+7)^2 - (m+8)^2 = 0.$$

Ezt felhasználva egyértelműen adódik, hogy minden szám végtelen sokféle módon előáll a kívánt alakban.

3. Bizonyítsd be, hogy legalább négy különböző elemre van szükség egy olyan végtelen sorozat előállításához, amelynek bármely két szomszédos, azonos hosszúságú részsorozatára igaz, hogy nem kapható meg egyikből a másik az elemek permutálásával! Részsorozat alatt a sorozat néhány egymást követő elemét értjük. Két részsorozat szomszédos, ha az első részsorozat utolsó eleme valamint a második részsorozat első eleme az eredeti sorozat egymást követő elemei.

Megoldás. Bebizonyítjuk, hogy egy, kettő illetve három elem segítségével nem képezhetünk ilyen végtelen sorozatot. Egy elem esetén nyilvánvaló. Két elem esetén (legyenek ezek 0 és 1), az általánosság elvesztése nélkül feltételezhetjük, hogy a sorozat első eleme 0. Ekkor a sorozat második eleme 1 kell, hogy legyen, mivel ha a sorozat 00-val kezdődne, akkor a 0 és a 0, mint két egy elemet tartalmazó szomszédos részsorozat megszegi a feladat feltételét. Tehát a sorozat második eleme 1. Ugyanezen logika alapján a sorozat harmadik eleme 0 kell hogy legyen. Viszont a negyedik elemre már nincs választási lehetőségünk, ugyanis ha 0101 a sorozat kezdete, akkor a 01 és 01 szegi meg a feltételt, ha pedig 0100, akkor ismét a 0 és 0 szegi meg a feltételt.

Bizonyítsuk most be, hogy három elem (0,1,2) sem elegendő. Ismét az általánosság elvesztése nélkül feltételezhetjük, hogy a sorozat első eleme 0, a második eleme pedig 1. A harmadik elem lehet 0 vagy 2. Az alábbi ábra szemlélteti a lehetőségeket a sorozat folytatására:



Láthatjuk, hogy egyik esetben sincs lehetőség a sorozat folytatására. Mutassuk meg például a 0121012 esetet (ha mindig a jobb oldali elágazást választjuk):

- 0-val nem folytathatjuk: 012**10120**, 210 → 120;
- 1-gyel nem folytathatjuk: **01210121**, 0121 → 0121;
- 2-vel nem folytathatjuk: 012101**22**, 2 → 2.

(Megjegyzés: meg lehet mutatni, hogy négy elem valóban elegendő egy a feltételeket kielégítő végtelen sorozat előállításához.)

4. Határozd meg az összes olyan számrendszert, amelyben a 3806130 szám négyjegyű palindrom! (Megjegyzés: $3806130 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17^2 \cdot 439$, valamint $\sqrt[4]{3806130} \approx 44,17$ és $\sqrt[3]{3806130} \approx 156,13$.)

Megoldás. Ahhoz, hogy a 3806130 szám négyjegyű szám legyen egy adott b számrendszerben, teljesülnie kell a következő feltételnek:

$$\langle 1, 0, 0, 0 \rangle_b \leq 3806130 < \langle 1, 0, 0, 0, 0 \rangle_b,$$

ahonnan azt kapjuk, hogy $\sqrt[4]{3806130} < b \leq \sqrt[3]{3806130}$, azaz $b \in [45, 156]$. Tegyük fel, hogy a b számrendszerben a 3806130 szám négyjegyű palindrom. Ekkor felírható, hogy

$$\begin{aligned} 3806130 &= \langle a, c, c, a \rangle_b = ab^3 + cb^2 + cb + a = a(b^3 + 1) + cb(b + 1) \\ &= a(b + 1)(b^2 - b + 1) + cb(b + 1) = (b + 1)(a(b^2 - b + 1) + cb). \end{aligned}$$

Innen adódik, hogy $b + 1 \mid 3806130$. Mivel $b \in [45, 156]$, ezért a $b + 1$ lehetséges értékei 51, 85 és 102, vagyis az egyedüli esélyes számrendszerek az 50, 84 és 101. Ezekben a számrendszerekben

$$3806130 = \langle 30, 22, 22, 30 \rangle_{50}$$

$$3806130 = \langle 6, 35, 35, 6 \rangle_{84}$$

$$3806130 = \langle 3, 70, 11, 46 \rangle_{101}$$

Vagyis a keresett számrendszerek az 50 és 84.