

XXIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2025. december 7.

9. évfolyam

- 1. Kiszámítottuk négy adott szám összes lehetséges kéttagú összegét. Közülük a négy legkisebb összeg 1, 5, 8 és 9. Melyik lehetett ez a négy adott szám?**
- 2. Egy háromszög egyik oldala 2 egység hosszúságú, a rajta fekvő szögek 60° és 75° -osak. Mekkora a háromszög területe?**
- 3. Hány olyan sorrendje van a 2019, 2020, 2021, 2022, 2023, 2024 és 2025 számoknak, melyben bármely négy egymást követő szám összege osztható 3-mal?**
- 4. Egy kocka csúcsaiba egy-egy természetes számot írunk. Ez után egy lépésben valamely él végpontjaiban lévő 1–1 számot megnöveljük. Elérhető-e valahány ilyen lépés után, hogy minden csúcsban azonos szám álljon, ha a számozás kezdetben:**
 - a) az alaplapon (valamilyen körüljárás szerint) 1, 2, 3, 4, a fedőlapon 5, 6, 7, 8 úgy, hogy az 1 és az 5, a 2 és a 6, a 3 és a 7, a 4 és a 8 páronként azonos testátlóra illeszkednek;**
 - b) egy csúcsban 1, a többiben 0 áll;**
 - c) Az alaplapon egy lapátló mentén két db 1-es, a kocka többi hat csúcsában 0 áll?**

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XXIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI – 9. évfolyam

1. Kiszámítottuk négy adott szám összes lehetséges kéttagú összegét. Közülük a négy legkisebb összeg 1, 5, 8 és 9. Melyik lehetett ez a négy adott szám?

Megoldás. Legyen a négy szám a , b , c és d úgy, hogy $a \leq b \leq c \leq d$. Négy számnak hat darab kéttagú összege van. Öt összegre nézve egyértelműen megállapíthatjuk a nagyságrendi viszonyokat:

$$a+b \leq a+c \leq b+c \leq b+d \leq c+d.$$

Az $a+d$ helye kérdéses. Két eset van:

$$\text{I. } a+b \leq a+c \leq a+d \leq b+c \leq b+d \leq c+d.$$

$$\text{II. } a+b \leq a+c \leq b+c \leq a+d \leq b+d \leq c+d.$$

Az első esetben adódik a következő egyenletrendszer:

$$a+b=1$$

$$a+c=5$$

$$a+d=8$$

$$b+c=9,$$

amelynek megoldása $a = -1,5$; $b = 2,5$; $c = 6,5$ és $d = 9,5$.

A második esetben az

$$a+b=1$$

$$a+c=5$$

$$a+d=9$$

$$b+c=8$$

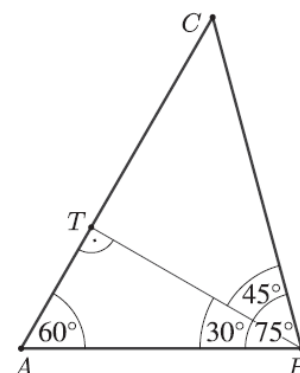
egyenletrendszert kapjuk, amelynek megoldása $a = -1$; $b = 2$; $c = 6$ és $d = 10$.

2. Egy háromszög egyik oldala 2 egység hosszúságú, a rajta fekvő szögek 60° és 75° -osak. Mekkora a háromszög területe?

Megoldás. Készítsünk ábrát!

Legyen TB az ABC háromszög magassága. Ekkor az ABT háromszög derékszögű, még hozzá egy szabályos háromszög fele. Mivel $AB = 2$, így $AT = 1$. Pitagorasz tételével kiszámolható, hogy $TB = \sqrt{3}$. A TBC szög 45° -os, ami alapján a BCT háromszög egyenlő szárú derékszögű háromszög, így $CT = BT = \sqrt{3}$. Most már kiszámolhatjuk a keresett területet:

$$t = \frac{ah}{2} = \frac{AC \cdot BT}{2} = \frac{(AT + TC)BT}{2} = \frac{(1 + \sqrt{3})\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3} + 3}{2}.$$



3. Hány olyan sorrendje van a 2019, 2020, 2021, 2022, 2023, 2024 és 2025 számoknak, melyben bármely négy egymást követő szám összege osztható 3-mal?

Megoldás. Figyeljük a számok 3-mal vett osztási maradékait: 0, 1, 2, 0, 1, 2, 0. Ha $3 \mid a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ és $3 \mid a_2 + a_3 + a_4 + a_5$, akkor $3 \mid (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) - (a_2 + a_3 + a_4 + a_5)$, azaz

$3 \mid a_1 - a_5$. Mivel a_1 és a_5 is csak 0, 1 vagy 2 lehet, ezért $a_1 = a_5$. Hasonlóan belátható, hogy $a_2 = a_6$, és $a_3 = a_7$. Ha $a_4 \neq 0$, akkor az előbbieken leírt duplázódás alapján nem szerepelhet páratlan számú nulla a számok között, tehát $a_4 = 0$. Az első három helyre három különböző maradéknak kell kerülnie, és ez egyértelműen meghatározza az utolsó három helyen szereplő maradékot. Három különböző maradékot hatféleképp helyezhetünk el az első három helyre. Minden maradékok által meghatározott különböző sorozathoz $6 \cdot 2 \cdot 2 = 24$ különböző módon társíthatjuk az eredeti számokat. Összegezve: az összes lehetőség száma $6 \cdot 24 = 144$.

4. Egy kocka csúcsaiba egy-egy természetes számot írunk. Ez után egy lépésben valamely él végpontjaiban lévő 1–1 számot megnöveljük. Elérhető-e valahány ilyen lépés után, hogy minden csúcsban azonos szám álljon, ha a számozás kezdetben:

a) az alaplapon (valamilyen körüljárás szerint) 1, 2, 3, 4, a fedőlapon 5, 6, 7, 8 úgy, hogy az 1 és az 5, a 2 és a 6, a 3 és a 7, a 4 és a 8 páronként azonos testátlóra illeszkednek;

b) egy csúcsban 1, a többiben 0 áll;

c) Az alaplapon egy lapátló mentén két db 1-es, a kocka többi hat csúcsában 0 áll;

Megoldás. a) Elérhető. Először a függőleges éleket használva a fedőlapi csúcsok számait 8-ra növeljük. Ekkor az alaplap csúcsain a 2, 2, 6, 6 számok lesznek. Az azonos számokat összekötő élek segítségével itt is elérhetjük, hogy mindegyik élben 8-as legyen.

b) Nem elérhető. Kezdőhelyzetben a csúcsokra írt számok összege 1. Egy él két végén megnövelve a számokat a csúcsokra írt számok összege kettővel nő, vagyis csakis páratlan szám lehet. Ha elérnénk azt az állapotot, hogy mindegyik csúcsban azonos szám lenne, akkor a csúcsokba írt számok összege páros lenne. Ezek alapján nem elérhető.

c) Nem elérhető. Bontsuk föl a kocka csúcsait két csoportra úgy, hogy azonos csoportba olyan csúcsok kerüljenek, amelyek között nem vezet él. Például A_1, A_3, B_2, B_4 , és A_2, A_4, B_1, B_3 , ahol A_i az alaplap, B_i a fedőlapi csúcsai, és $A_i B_i$ is él, miközben $i = 1, 2, 3, 4$. Ekkor az egyik csoportban a csúcsokra írt számok összege 2, a másikban 0. Mivel megállapíthatjuk, hogy bármely él két végpontjában található csúcsokba írt számok növelésével a két csoport csúcsaihoz írt számok összege külön-külön nő 1-gyel, így különbsége nem változik, ezért elérhetetlen az egyenlőség, ami a kívánt végállapothoz szükséges.