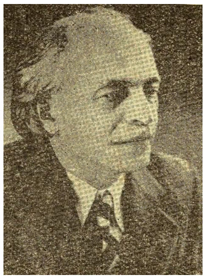


XI. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2013. november 30.

<u>10. évfolyam</u>

1. Anna egy piros, egy fehér és egy zöld színű dobókockával játszott. Feldobta a kockákat, majd a következő eljárással számolta ki a dobás pontértékét: a piros kockával dobott számot megszorozta 5-tel, majd hozzáadta a fehér kockával dobott számot. Az így kapott eredményt megszorozta 10-zel, majd hozzáadta a zöld kockával dobott számot. A kapott eredmény lett a dobás pontértéke.
a) Egy alkalommal a dobás pontértéke 276 volt. Melyik kockával hányat dobott ekkor Anna?
b) Egy alkalommal a piros, fehér és zöld kockával dobott számok ebben a sorrendben egymást követő egész számok voltak. Kaphatott-e ilyen dobássorozat esetén pontértékre prímszámot? Hány esetben?

2. Az $ABCD$ téglalap oldalai $AB = 18cm$, $AD = 6cm$. A téglalap AB oldalára, mint ámérőre kört rajzoltunk, amely a téglalap AC átlóját a P pontban, BD átlóját pedig a Q pontban metszi. Számítsd ki az $ABPQ$ trapéz területét!

3. Egy 1-es, egy 2-es, egy 5-ös és n darab 4-es mindegyikének felhasználásával képeztük az összes $n+3$ jegyű számot. Ha tudjuk, hogy a kapott számok között 4-gyel oszthatóból 60-nal több van mint 5-tel oszthatóból, akkor mennyi n értéke?

4. Add meg a valós számpárok halmazán a következő egyenletrendszer megoldáshalmazát:

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = xy, \qquad 2xy + x + y = \frac{36}{5}.$$

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

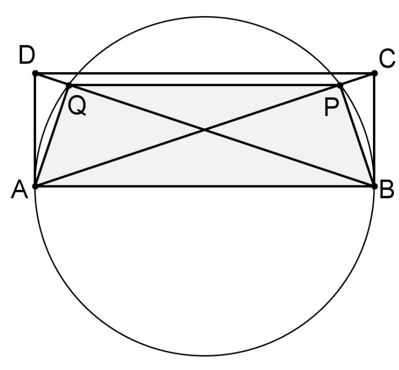
MEGOLDÁSOK – <u>10. évfolyam</u>

1. Anna egy piros, egy fehér és egy zöld színű dobókockával játszott. Feldobta a kockákat, majd a következő eljárással számolta ki a dobás pontértékét: a piros kockával dobott számot megszorozta 5-tel, majd hozzáadta a fehér kockával dobott számot. Az így kapott eredményt megszorozta 10-zel, majd hozzáadta a zöld kockával dobott számot. A kapott eredmény lett a dobás pontértéke.
a) Egy alkalommal a dobás pontértéke 276 volt. Melyik kockával hányat dobott ekkor Anna?
b) Egy alkalommal a piros, fehér és zöld kockával dobott számok ebben a sorrendben egymást követő egész számok voltak. Kaphatott-e ilyen dobássorozat esetén pontértékre prímszámot? Hány esetben?

Megoldás. a) Ha $\left(5p+f\right)\cdot 10+z=276$, akkor csak $z=6$ lehetséges, és ekkor $5p+f=27$, ahonnan csak $f=2$ és $p=5$ lehetséges. A piros kockával tehát 5-öt, a fehérrel 2-t a zölddel pedig 6-ot kellet dobnia.
b) A feltételekből az következik, hogy $f=p+1,\ z=p+2$ és $p\le 4$. Ekkor a dobott pontérték $\left(5p+p+1\right)\cdot 10+p+2=61p+12$. Ez páros p esetén páros szám, ami nem lehet prím, tehát p csak páratlan szám lehet, 1 vagy 3. Ha $p=1$ akkor $61p+12=73$, ami prímszám. Ha $p=3$ akkor $61p+12=195$, ami összetett szám. Így csak egy dobásban, $p=1,\ f=2, z=3$ esetén kapunk a pontértékre prímszámot.

2. Az $ABCD$ téglalap oldalai $|AB|=18cm$, $|AD|=6cm$. A téglalap AB oldalára, mint átmérőre kört rajzoltunk, amely a téglalap AC átlóját a P pontban, BD átlóját pedig a Q pontban metszi. Számítsd ki az $ABPQ$ trapéz területét!

Megoldás. A trapéz átlói $|AC|=|BD|=\sqrt{18^2+6^2}=6\sqrt{10}$. $APB\triangle$ derékszögű, mert $APB\angle$ átmérőn fekvő kerületi szög. Legyen $|AP|=x$, ekkor $|PC|=6\sqrt{10}-x$. A $|BP|^2=18^2-x^2$ és $|BP|^2=6^2-\left(6\sqrt{10}-x\right)^2$ összefüggésekből következik, hogy $x=\frac{54}{\sqrt{10}}$, ebből pedig $|BP|=\frac{18}{\sqrt{10}}$. A trapéz h magasságára az $APB\Delta$ derékszögű háromszög területéből következik, hogy $18\cdot h=\frac{54}{\sqrt{10}}\cdot\frac{8}{\sqrt{10}}$, ahonnan $h=\frac{54}{10}$. Legyen T a trapéz P csúcsából bocsátott h magasság talppontja az AB alapon. Ekkor Pitagorasz tételéből $|TB|=\frac{9}{5}$, ahonnan a trapéz rövidebb alapja $|PQ|=18-2\cdot\frac{9}{5}=\frac{72}{5}$. Így a trapéz keresett területe



$$T=\frac{|AB|+|PQ|}{2}\cdot h=\frac{18+\frac{72}{5}}{2}\cdot\frac{54}{10}=$$

$$=\frac{8748}{100}=87,48cm^2.$$

3. Egy 1-es, egy 2-es, egy 5-ös és n darab 4-es mindegyikének felhasználásával képeztük az összes $n+3$ jegyű számot. Ha tudjuk, hogy a kapott számok között 4-gyel oszthatóból 60-nal több van mint 5-tel oszthatóból, akkor mennyi n értéke?

Megoldás: Adott tehát a következő $n+3$ darab számjegy: $1, 2, 5, 4, 4, 4, ..., 4$ (n darab 4-es). Ezek közül 5-tel oszthatóak azok és csakis azok, amelyek utolsó számjegye 5. Ezekből pedig

$$\frac{(n+2)!}{n!} = (n+1)(n+2)$$

van. 4-gyel azok oszthatóak, amelyek utolsó két jegye $12, 52, 24$ vagy 44. A 12-re és 52-re végződőek száma egyaránt $\frac{(n+1)!}{n!} = n+1$. A 24-re végződőek száma $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = n(n+1)$, míg a 44-re végződőek száma $\frac{(n+1)!}{(n-2)!} = (n+1)n(n-1)$. Így összesen $2(n+1)+n(n+1)+(n+1)n(n-1)$ néggyel osztható szém képezhető. A feltétel szerint ezek száma 60-nal több mint az 5-tel oszthatóaké, vagyis

$$2(n+1)+n(n+1)+(n+1)n(n-1)-60 = (n+1)(n+2).$$

Innen

$$(n+1)(n+2)+(n+1)n(n-1) = 60+(n+1)(n+2),$$

ahonnan

$$(n+1)n(n-1) = 60,$$

vagyis a 60-at kell három egymást követő pozitív szám szorzatára bontani. Mivel $60 = 5 \cdot 4 \cdot 3$, így $n = 4$ a megoldás, azaz 4 darab 4-es kell legyen a számok között.

4. Add meg a valós számpárok halmazán a következő egyenletrendszer megoldáshalmazát:

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = xy, \qquad 2xy + x + y = \frac{36}{5}.$$

Megoldás. Az egyenlet értelmezett, ha $x \neq 0$ és $x \neq -1$.

Rendezés után az első egyenlet $\frac{1+x}{x+1} = xy$, vagyis $1 = xy$ alakot ölt, ahonnan $y = \frac{1}{x}$.

Ezt a második egyenletbe helyettesítve az $5x^2 - 26x + 5 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk.

Ennek megoldásai $x_{1/2} = \frac{26 \pm \sqrt{676-100}}{10} = \frac{26 \pm 24}{10}$, illetve $x_1 = \frac{1}{5}$ és $x_2 = 5$, s ezek elfogadható értékek az $x-$re. Ekkor $y_1 = 5$ és $y_2 = \frac{1}{5}$.

Az $\left(\frac{1}{5}, 5\right)$ és az $\left(5, \frac{1}{5}\right)$ számpárok kielégítik az adott egyenletrendszert.

Így a keresett megoldáshalmaz $M = \left\{\left(\frac{1}{5}, 5\right), \left(5, \frac{1}{5}\right)\right\}$.