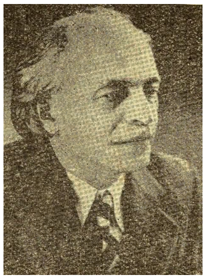


XI. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2013. november 30.

12. évfolyam

1. **A 2013 szám olyan, hogy a 0, 1, 2, …, 9 számjegyek közül négy szomszédos alkotja (nevezetesen a 0, 1, 2 és 3) valamilyen sorrendben.**
a) Hány olyan négyjegyű szám van, amelyet négy szomszédos számjegy alkot valamilyen sorrendben?
b) Ha az összes ilyen számot összeadjuk, hányas szám áll az összegben az egyesek helyén?

2. Oldd meg a valós számok halmazán az $x^{\log_2 3} + 3^{\log_2 \sqrt{x}} = 12$ **egyenletet!**

3. Bizonyítsd be, hogy a húrnégyszög köré írt kör bármely P **pontjának a húrnégyszög két szemközti oldalától mért távolságának a szorzata egyenlő a másik két oldaltól mért távolságok szorzatával!**

4. A hét törpe elhatározza, hogy Mikuláskor megajándékozzák egymást. Mindegyikük nevét felírják egy cetlire, és mindegyikük húz egy nevet. A sorsolást akkor nevezzük jónak, ha senki sem húzza a saját nevét. Hány jó sorsolás lehetséges?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

MEGOLDÁSOK – 12. évfolyam

1. A 2013 szám olyan, hogy a 0, 1, 2, …, 9 számjegyek közül négy szomszédos alkotja (nevezetesen a 0, 1, 2 és 3) valamilyen sorrendben.
a) Hány olyan négyjegyű szám van, amelyet négy szomszédos számjegy alkot valamilyen sorrendben?
b) Ha az összes ilyen számot összeadjuk, hányas szám áll az összegben az egyesek helyén?

Megoldás. a) A lehetséges négyjegyű számok a következő számjegyeket tartalmazzák: 0, 1, 2, 3 vagy 1, 2, 3, 4 vagy 2, 3, 4, 5 vagy 3, 4, 5, 6 vagy… vagy 6, 7, 8, 9. Az első esetben a négy számjegyből 18, a többi esetben pedig 24 négyjegyű szám képezhető. Ezek mind különbözők és köztük van az összes keresett szám, tehát $18+6\cdot 24=162$ darab ilyen szám van.
b) Próbáljuk meg a 162 darab számot végződéseik szerint csoportosítani. A 0, 1, 2, 3 számjegyekből képzett négyjegyű számok közül 6 darab végződik 0-ra (ezek összege is 0-ra végződik), 4 darab végződik 1-esre (ezek összege 4-esre végződik), 4 darab 2-esre (8) és 4 darab 3-asra (2). A zárójelben lévő számok összegeinek utolsó számjegye 4. Tehát a 0,1,2,3 számjegyekből képzett számok összegének utolsó számjegye 4. A gondolatmenetet folytatva kitölthetjük a táblázatot.

számjegyek	utolsó számjegy	darab	az összeg utolsó számjegye		
0,1,2,3	0	6	0		
	1	4	4		
	2	4	8		
	3	4	2	összesen:	4
1,2,3,4	1	6	6		
	2	6	2		
	3	6	8		
	4	6	4	összesen:	0
2,3,4,5	2	6	2		
	3	6	8		
	4	6	4		
	5	6	0	összesen:	4
3,4,5,6	3	6	8		
	4	6	4		
	5	6	0		
	6	6	6	összesen:	8
4,5,6,7		24	4,0,6,2	összesen:	2
5,6,7,8		24	0,6,2,8	összesen:	6
6,7,8,9		24	6,2,8,4	összesen:	0

A $4+0+4+8+2+6+0$ összeg utolsó számjegye a 4.

2. Oldd meg a valós számok halmazán az $x^{\log_2 3} + 3^{\log_2 \sqrt{x}} = 12$ egyenletet!

Megoldás. Ha $x > 0$, pozitív, akkor mindegyik logaritmus és hatvány értelmezett. Mivel

$$3^{\log_2 \sqrt{x}} = 3^{\frac{1}{2}\log_2 x} = \sqrt{3^{\log_2 x}} \ ,$$

valamint

$$\log_2 x^{\log_2 3} = \log_2 3 \cdot \log_2 x = \log_2 3^{\log_2 x} ,$$

érvényes, innen következik $x^{\log_2 3} = 3^{\log_2 x}$.

Ennek alapján, ha bevezetjük a $t = \sqrt{3^{\log_2 x}}$ helyettesítést, akkor a $t^2 + t - 12 = 0$ egyenlet megoldásait keressük, amelyek $t_1 = -4 < 0$ és $t_2 = 3$.

A negatív megoldást nem vesszük figyelembe, így $\sqrt{3^{\log_2 x}} = 3$ következik, vagyis

$$3^{\log_2 x} = 9 \ ,$$

amelyből

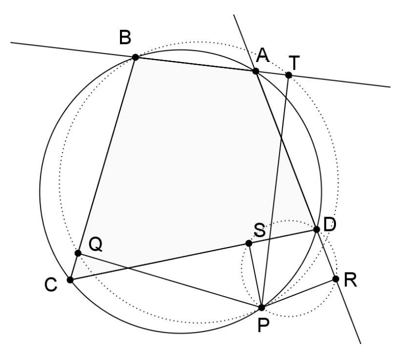
$$\log_2 x = 2 \ ,$$

a megoldás pedig $x = 4$.

3. Bizonyítsd be, hogy a húrnégyszög köré írt kör bármely P pontjának a húrnégyszög két szemközti oldalától mért távolságának a szorzata egyenlő a másik két oldaltól mért távolságok szorzatával!

Megoldás. Az $ABCD$ húrnégyszög köré írt körének egy tetszőleges pontja a P pont és ebből húzott merőlegesek talppontjai T, Q, R, S rendre az AB, BC, CD és DA oldalakra. A $PRDS$ négyszög húrnégyszög, mert a két szemközti szög az $S\angle = 90° = R\angle$. Tehát az azonos húrokhoz tartozó kerületi szögek egyenlők és ezek a $PRS\angle = PDS\angle = \varphi = PDC\angle = PBC\angle$.

Hasonlóan a $PTBQ$ négyszög is húrnégyszög és $PBQ\angle = PTQ\angle = \varphi$, valamint ha $PQT\angle = \varepsilon$, akkor a $PBT\angle = \varepsilon$.



A feltétel szerint $ABCD$ húrnégyszög és $ADC\angle = \mu$, ennek alapján a B és D csúcsoknál levő belső szögek összege $180° = \varepsilon + \varphi + \mu$, és így a D csúcsnál levő egyenesszöget alkotó harmadik szögre igaz, hogy $PDR\angle = \varepsilon$.

Korábban láttuk, hogy a $PRDS$ négyszög húrnégyszög, ezért $PDR\angle = PSR\angle = \varepsilon$.

A PRS és PTQ háromszögekben tehát két-két szög páronként egyenlő, vagyis a két háromszög hasonló, így a megfelelő oldalak aránya egyenlő.

Eszerint $\dfrac{\overline{PS}}{\overline{PR}} = \dfrac{\overline{PQ}}{\overline{PT}}$, ahonnan $\overline{PS} \cdot \overline{PT} = \overline{PR} \cdot \overline{PQ}$ azonnal következik.

4. A hét törpe elhatározza, hogy Mikuláskor megajándékozzák egymást. Mindegyikük nevét felírják egy cetlire, és mindegyikük húz egy nevet. A sorsolást akkor nevezzük jónak, ha senki sem húzza a saját nevét. Hány jó sorsolás lehetséges?

I.Megoldás. Képzeljük el, hogy megpróbáljuk leültetni a 7 törpét néhány asztalhoz úgy, hogy mindenki mellé jobbról ültessük azt, akinek a nevét húzza. Hányféleképpen lehet őket leültetni úgy, hogy senki nem ül magában? Két ülésrend akkor különböző, ha valakinek más a jobb oldali szomszédja.
Ha egyetlen asztalhoz ülnek le, akkor ezt $6! = 720$ -féle módon tehetik meg.
Ha egy 4 és 3 fős aszatalhoz ülnek, akkor $\binom{7}{3} \cdot 3! \cdot 2! = 35 \cdot 6 \cdot 2 = 420$ lehetőség adódik.
Ha viszont egy 3 fős és 2 fős asztaltársaság alakul, akkor $\frac{1}{2} \cdot \binom{7}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! = 210$ lehetőség van.
Még egy eset lehetséges, ha egy 5 fős és egy 2 fős asztalt használunk. Ekkor a lehetőségek száma $\binom{7}{5} \cdot 4! \cdot 1! = 504$.
Az összes lehetőségek száma ezek összege azaz $720 + 420 + 210 + 504 = 1854$.

II.Megoldás. Szitaformulával is megoldhatjuk:

$$7! - 7 \cdot 6! + \binom{7}{2} \cdot 5! - \binom{7}{3} \cdot 4! + \binom{7}{4} \cdot 3! - \binom{7}{5} \cdot 2! + \binom{7}{1} \cdot 6! - \binom{7}{7} \cdot 0! =$$
$$= 2520 - 840 + 210 - 42 + 7 - 1 = 1854.$$