

XII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2014. december 6.

10. évfolyam

1. Egy kétjegyű szám jegyei közé egy nullát írtunk. A kapott háromjegyű szám és az eredeti kétjegyű szám számtani közepe az eredeti kétjegyű szám fordítottjával egyenlő. Melyik kétjegyű számról van szó?

2. A szirakúzi Hieron király 16 font aranyat és 4 font ezüstöt utalt ki az udvari ötvösnek, hogy ebből készítsen neki koronát. (A font a tömeg egy mértékegysége.) A kész korona tömege pontosan 20 font volt, a király mégis gyanút fogott, hogy a derék ötvös a kiutalt arany egy részét ezüsttel pótolta. A dolog kivizsgálásával a híres ókori tudóst, Arkhimédészt bízta meg, aki megmérte a koronát vízben és megállapította, hogy a korona vízben $1\frac{1}{4}$ fontot veszített a tömegéből. Mivel Arkhimédész tudta, hogy 20 font arany vízben 1 fontot, 21 font ezüst vízben pedig 2 fontot veszít a tömegéből, így kiszámolta, hogy az arany egy részét valóban ezüsttel pótolták.
A kiutalt aranyból hány fontot helyettesített az udvari ötvös ezüsttel?

3. Egy szabályos háromszög oldalaira kifelé négyzeteket írtunk, majd egy olyan kört szerkesztettünk, amely áthalad a négyzeteknek a háromszög csúcsaitól különböző csúcsain. Mekkora a háromszög oldala, ha a kör sugara r ?

4. 229 db papírlap közül néhányat kettévágunk, majd a meglevő összes papírlap közül kétszer annyit, mint előbb újra kettévágunk. Ezután az eljárást valahányszor megismételjük. Hány lapot vágunk ketté legelőször, ha legvégül 2014 db papírlap keletkezett?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

MEGOLDÁSOK – 10. évfolyam

1. Egy kétjegyű szám jegyei közé egy nullát írtunk. A kapott háromjegyű szám és az eredeti kétjegyű szám számtani közepe az eredeti kétjegyű szám fordítottjával egyenlő. Melyik kétjegyű számról van szó?

Megoldás: Legyen a keresett kétjegyű szám $\overline{ab}$. Ekkor a feltételek szerint $\frac{\overline{ab} + \overline{a0b}}{2} = \overline{ba}$, vagyis $\frac{10a + b + 100a + b}{2} = 10b + a$, átrendezve pedig kapjuk, hogy $b = 6a$. Mivel az a és b egyjegyű számok és nem lehetnek egyenlőek 0-val, így a lehetséges $a = 1$ esetén $b = 6$. Tehát a keresett szám a 16.

2. A szirakúzi Hieron király 16 font aranyat és 4 font ezüstöt utalt ki az udvari ötvösnek, hogy ebből készítsen neki koronát. (A font a tömeg egy mértékegysége.) A kész korona tömege pontosan 20 font volt, a király mégis gyanút fogott, hogy a derék ötvös a kiutalt arany egy részét ezüsttel pótolta. A dolog kivizsgálásával a híres ókori tudóst, Arkhimédészt bízta meg, aki megmérte a koronát vízben és megállapította, hogy a korona vízben $1\frac{1}{4}$ fontot veszített a tömegéből. Mivel Arkhimédész tudta, hogy 20 font arany vízben 1 fontot, 21 font ezüst vízben pedig 2 fontot veszít a tömegéből, így kiszámolta, hogy az arany egy részét valóban ezüsttel pótolták.

A kiutalt aranyból hány fontot helyettesített az udvari ötvös ezüsttel?

Megoldás: Jelölje x a koronában levő arany tömegét (fontban), y pedig a koronában levő ezüst tömegét (fontban). Ekkor $x + y = 20$.

x font arany vízben $\frac{x}{20} \cdot 1$ fontot, y font ezüst vízben pedig $\frac{y}{21} \cdot 2$ fontot veszít a

tömegéből, s ez a két mennyiség összesen $1\frac{1}{4}$ font tömegvesztést jelent, azaz

$$\frac{x}{20} + \frac{2y}{21} = 1\frac{1}{4}.$$

Most meg kell oldani az

$$x + y = 20$$

$$\frac{x}{20} + \frac{2y}{21} = \frac{5}{4},$$

azaz

$$x + y = 20$$

$$21x + 40y = 525$$

egyenletrendszer. A megoldás

$$x = \frac{275}{19} = 14\frac{9}{19}, \quad y = \frac{105}{19} = 5\frac{10}{19}.$$

Válasz: Az udvari ötvös $\frac{29}{19}$ font aranyat helyettesített ezüsttel.

3. Egy szabályos háromszög oldalaira kifelé négyzeteket írtunk, majd egy olyan kört szerkesztettünk, amely áthalad a négyzeteknek a háromszög csúcsaitól különböző csúcsain. Mekkora a háromszög oldala, ha a kör sugara r ?

Megoldás: Az ABC háromszög és a négyzetek oldalait jelöljük x -szel. Az EFO háromszögben

$OE = r$, $EF = \frac{x}{2}$, $FO = x + TO$, ahol a TO szakasz az x oldalú szabályos háromszög magasságának harmada.

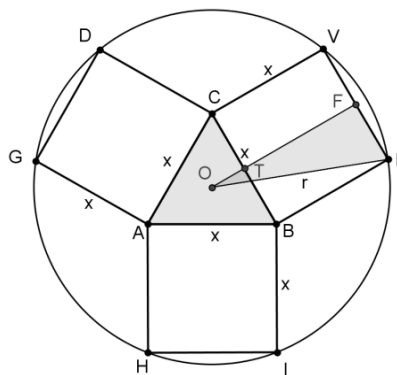
Mivel $TO = \frac{1}{3} \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{x\sqrt{3}}{6}$, így $FO = x + \frac{x\sqrt{3}}{6}$

Az EFO háromszögre alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt:

$$\left[x \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \right]^2 + \left(\frac{x}{2} \right)^2 = r^2,$$

$$\text{azaz } x^2 \left(\frac{12 + 1 + 3 + 4\sqrt{3}}{12} \right) = r^2,$$

$$\text{így } x^2 \left(\frac{4 + \sqrt{3}}{3} \right) = r^2, \quad \text{tehát } x = r \sqrt{\frac{3}{4 + \sqrt{3}}}, \quad (x \approx r \cdot 0,7234).$$



4. 229 db papírlap közül néhányat kettévágunk, majd a meglevő összes papírlap közül kétszer annyit, mint előbb újra kettévágunk. Ezután az eljárást valahányszor megismételjük. Hány lapot vágunk ketté legelőször, ha legvégül 2014 db papírlap keletkezett?

Megoldás: Jelölje n a legelőször kettévágott papírlapok számát ($n \leq 229$). Így az első vágás után keletkező papírlapok száma:

$$2n + 229 - n = 229 + n.$$

Másodszor $2n$ db lapot vágunk ketté, így a keletkező lapok száma:

$$4n + 229 + n - 2n = 229 + 3n = 229 + 4n - n.$$

Harmadszor $4n$ lapot vágunk ketté és összesen $229 + 8n - n$ lesz a lapok száma, tehát a k -adik vágás után

$$229 + 2^k n - n$$

lapunk lesz. A feladatot így a $229 + 2^k n - n = 2014$ egyenlettel kell megoldani, ahol k és n pozitív egész számok. Átrendezve adódik

$$(2^k - 1)n = 1785,$$

ahol az 1785-t kell két pozitív egész szám szorzatára bontani.

Mivel $1785 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17$, így a szám 229-nél kisebb osztói:

$$1, 3, 5, 7, 15, 17, 21, 35, 51, 85, 105, 119.$$

Táblázatba írva ezeket, azt tapasztaljuk, hogy csak $n = 7$ és $n = 119$ esetén kapunk 2 hatványánál eggyel kevesebbet, ezért $k = 8$, valamint $k = 16$ lesz a megoldás. Ezek szerint, ha a feladatban leírt eljárást végrehajtva 2014 db papírlap keletkezett, akkor első alkalommal vagy 7 db papírlapot vágunk ketté és az eljárást 8-szor hajtottuk végre, vagy pedig 119 lapot vágunk el legelőször és 4-szer vágunk összesen.