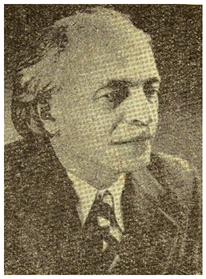


XII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2014. december 6.

11. évfolyam

1. Határozd meg mindazokat a k, m, n természetes számokat, amelyekre $2^k + 10^m - 10^n = 2014$.

2. Oldd meg a valós számok halmazán a $\dfrac{\sin x + \operatorname{tg} x}{\cos x + \operatorname{ctg} x} > 0$ **egyenlőtlenséget!**

3. Legyenek B' és C' az ABC háromszög B és C csúcsainak merőleges vetületei a háromszög szemközti oldalára. Bizonyítsd be, hogy az A csúcsból a $B'C'$ egyenesre húzott merőleges tartalmazza a háromszög körülírt körének középpontját!

4. Állítsd elő az

$$S = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \ldots + \sqrt{1 + \frac{1}{2013^2} + \frac{1}{2014^2}}$$

összeget $S = \dfrac{p}{q}$ **alakban, ahol** $p, q \in N$ **és** p, q **relatív prímek!**

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

MEGOLDÁSOK – 11. évfolyam

1. Határozd meg mindazokat a k, m, n természetes számokat, amelyekre $2^k + 10^m - 10^n = 2014$.

Megoldás: Ha $k > 1,\ m > 1,\ n > 1$, akkor az egyenlet bal oldala osztható néggyel, ami ellentmondás, mert 2014 viszont nem osztható néggyel, tehát a $k,\ m,\ n$ természetes számok közül legalább egyik egyenlő eggyel.
Ha $k = 1$, akkor az egyesek helyén álló számjegy 2, ami ugyancsak lehetetlen, mert a 2014 számban az egyesek helyén 4 áll.
Ha $m = 1$, akkor az egyenlet $2^k - 2004 = 10^n$ alakú, ami azt jelenti, hogy $2^k > 2004$, vagyis $k > 10$. Mivel a $2^k - 2004$ osztható néggyel, de nyolccal nem, az eredmény $n = 2$, ez viszont ellentmondás, mert a 2104 nem a kettőnek a hatványa.
Ha $n = 1$, akkor $2^k + 10^m = 2024$ azaz $10^m < 2024$, vagyis $m \leq 3$.
A megoldás tehát $(k,\ m,\ n) = (10,\ 3,\ 1)$.

2. Oldd meg a valós számok halmazán a $\dfrac{\sin x + \mathrm{tg} x}{\cos x + \mathrm{ctg} x} > 0$ egyenlőtlenséget!

Megoldás:

$$\frac{\sin x + \mathrm{tg} x}{\cos x + \mathrm{ctg} x} = \frac{\sin^2 x(\cos x + 1)}{\cos^2 x(\sin x + 1)} > 0$$

Értelmezési tartomány:

$$\sin x \neq 0, \cos x \neq 0, \sin x \neq -1, \text{ azaz } x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in Z .$$

Tudjuk, hogy $\sin^2 x > 0$ és $\cos^2 x > 0$. Ekkor

$$\frac{\sin^2 x(\cos x + 1)}{\cos^2 x(\sin x + 1)} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\cos x + 1}{\sin x + 1} > 0,$$

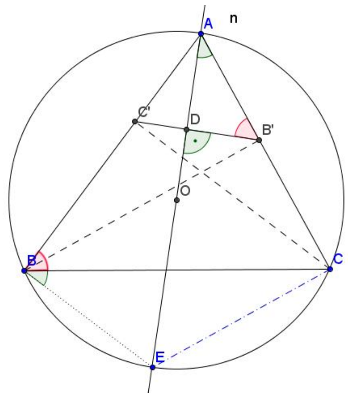
amely összevetve az értelmezési tartománnyal is, akkor teljesül, ha:

a) $\sin x + 1 > 0 \ \wedge \ \cos x + 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x > -1 \ \wedge \ \cos x > -1 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq \dfrac{k\pi}{2}, k \in Z$,

b) $\sin x + 1 < 0 \ \wedge \ \cos x + 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x < -1 \ \wedge \ \cos x < -1$.
amiből viszont nem kapunk megoldást.
Összefoglalva, az egyenlőtlenség megoldáshalmaza :

$$M = R \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2} \right\}, k \in Z .$$

3. Legyenek B' és C' az ABC háromszög B és C csúcsainak merőleges vetületei a háromszög szemközti oldalára. Bizonyítsd be, hogy az A csúcsból a $B'C'$ egyenesre húzott merőleges tartalmazza a háromszög körülírt körének középpontját!



Megoldás: Az A csúcsból húzott $B'C'$ egyenesre merőleges n egyenes metszi a $B'C'$ egyenest D pontban, az ABC háromszög köré írt kört pedig E pontban metszi. A derékszögek miatt a $BCB'C'$ húrnégyszög, azaz

$$AB'C'\angle \cong ABC\angle .$$

Mivel $AD \perp B'C'$, ahonnan

$$B'AD\angle = 90° - AB'C'\angle = 90° - ABC\angle$$

valamint $EAC\angle \cong EBC\angle$, mert azonos húr feletti kerületi szögek, ezért

$$ABC\angle + CBE\angle = 90° \Rightarrow ABE\angle = 90°,$$

s ez azt jelenti AE átmérő.

4. Állítsd elő az $S=\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{1}{2013^2}+\frac{1}{2014^2}}$ összeget $S=\frac{p}{q}$ alakban, ahol $p,q\in N$ és p,q relatív prímek!

Megoldás: Alakítsuk a gyök alatti kifejezéseket a következőképpen:

$$1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{n^2(n+1)^2+(n+1)^2+n^2}{n^2(n+1)^2}=\frac{n^2(n^2+2n+1)+n^2+2n+1+n^2}{n^2(n+1)^2}=$$

$$=\frac{n^4+2n^3+n^2+n^2+2n+1+n^2}{n^2(n+1)^2}=\frac{n^4+n^2+1+2n^3+2n^2+2n}{n^2(n+1)^2}=\frac{(n^2+n+1)^2}{n^2(n+1)^2},$$

így

$$\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}=\sqrt{\frac{(n^2+n+1)^2}{n^2(n+1)^2}}=\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}=\frac{n(n+1)+1}{n(n+1)}=1+\frac{1}{n(n+1)}=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

Ekkor

$$S=\left(1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(1+\frac{1}{2012}-\frac{1}{2013}\right)+\left(1+\frac{1}{2013}-\frac{1}{2014}\right)$$

$$S=2013+1-\frac{1}{2014}=2014-\frac{1}{2014}=\frac{2014^2-1}{2014},$$

vagyis

$$S=\frac{4\ 056\ 195}{2014}.$$