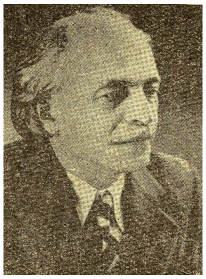

XII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2014. december 6.

9. évfolyam

1. **Pisti felírta a táblára a számokat 1-től 12-ig. Ferivel a következő játékot játsszák: Felváltva letörölnek a tábláról két számot, és a letörölt számok helyett fölírják a két szám összegénél 1-gyel kisebb számot. A játék addig tart, amíg egyetlen egy szám marad a táblán. Ha ez a szám páros, akkor Pisti nyert, ha páratlan, akkor Feri. Hogyan játsszon Pisti, ha ő kezd, és mindenképpen nyerni szeretne Feri bármilyen „törlései" mellett?**

2. A szirakúzai Hieron király 16 font aranyat és 4 font ezüstöt utalt ki az udvari ötvösnek, hogy ebből készítsen neki koronát. (A font a tömeg egy mértékegysége.) A kész korona tömege pontosan 20 font volt, a király mégis gyanút fogott, hogy a derék ötvös a kiutalt arany egy részét ezüsttel pótolta. A dolog kivizsgálásával a híres ókori tudóst, Arkhimédészt bízta meg, aki megmérte a koronát vízben és megállapította, hogy a korona vízben $1\frac{1}{4}$ fontot veszített a tömegéből. Mivel Arkhimédész tudta, hogy 20 font arany vízben 1 fontot, 21 font ezüst vízben pedig 2 fontot veszít a tömegéből, így kiszámolta, hogy az arany egy részét valóban ezüsttel pótolták.
A kiutalt aranyból hány fontot helyettesített az udvari ötvös ezüsttel?

3. Az $1^1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot 4^2\cdot 5^1\cdot 6^1\cdot 7^2\cdot 8^3\cdot 9^2\cdot 10^1$ **szorzat eredményére András az** 1053455154300**, Andrea az** 1053455154600 **számot kapta. Melyik lehet közülük a helyes?**

4. Legyen F **az** ABC **háromszög** AB **oldalának felezőpontja! Rajzold meg az** AC**, illetve** BC **oldalakra kifelé az** $ACPQ$**, illetve** $BCSR$ **négyzeteket! Bizonyítsd be, hogy** $PS = 2CF$**.**

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

MEGOLDÁSOK – 9. évfolyam

1. **Pisti felírta a táblára a számokat 1-től 12-ig. Ferivel a következő játékot játsszák: Felváltva letörölnek a tábláról két számot, és a letörölt számok helyett fölírják a két szám összegénél 1-gyel kisebb számot. A játék addig tart, amíg egyetlen egy szám marad a táblán. Ha ez a szám páros, akkor Pisti nyert, ha páratlan, akkor Feri. Hogyan játsszon Pisti, ha ő kezd, és mindenképpen nyerni szeretne Feri bármilyen „törlései" mellett?**

Megoldás: Kezdőhelyzetben a táblán lévő számok összege: $1+2+\cdots+12=78$. Minden törlés után az összeg 1-gyel csökken, és minden törlés után egy számmal kevesebb van a táblán. Vagyis a 12 darab számból 11 törlés után egyetlen szám marad, ekkor ér véget a játék, közben az összeg éppen 11-gyel csökkent, vagyis 67 lesz. Ezek szerint ez egy nagyon igazságtalan játék Pistivel szemben, mert Feri kezdőként akárhogy játszik, nyerni fog.

2. A szirakúzai Hieron király 16 font aranyat és 4 font ezüstöt utalt ki az udvari ötvösnek, hogy ebből készítsen neki koronát. (A font a tömeg egy mértékegysége.) A kész korona tömege pontosan 20 font volt, a király mégis gyanút fogott, hogy a derék ötvös a kiutalt arany egy részét ezüsttel pótolta. A dolog kivizsgálásával a híres ókori tudóst, Arkhimédészt bízta meg, aki megmérte a koronát vízben és megállapította, hogy a korona vízben $1\frac{1}{4}$ fontot veszített a tömegéből. Mivel Arkhimédész tudta, hogy 20 font arany vízben 1 fontot, 21 font ezüst vízben pedig 2 fontot veszít a tömegéből, így kiszámolta, hogy az arany egy részét valóban ezüsttel pótolták.
A kiutalt aranyból hány fontot helyettesített az udvari ötvös ezüsttel?

Megoldás: Jelölje x a koronában levő arany tömegét (fontban), y pedig a koronában levő ezüst tömegét (fontban). Ekkor $x+y=20$.

x font arany vízben $\frac{x}{20}\cdot 1$ fontot, y font ezüst vízben pedig $\frac{y}{21}\cdot 2$ fontot veszít a tömegéből, s ez a két mennyiség összesen $1\frac{1}{4}$ font tömegveszteséget jelent, azaz

$$\frac{x}{20}+\frac{2y}{21}=1\frac{1}{4}.$$

Most meg kell oldani az

$$\begin{aligned} x+y&=20 \\ \frac{x}{20}+\frac{2y}{21}&=\frac{5}{4}, \end{aligned} \qquad \text{azaz} \qquad \begin{aligned} x+y&=20 \\ 21x+40y&=525 \end{aligned}$$

egyenletrendszert. A megoldás

$$x=\frac{275}{19}=14\frac{9}{19},\ y=\frac{105}{19}=5\frac{10}{19}.$$

Válasz: Az udvari ötvös $\frac{29}{19}$ font aranyat helyettesített ezüsttel.

3. Az $1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot 4^2 \cdot 5^1 \cdot 6^1 \cdot 7^2 \cdot 8^3 \cdot 9^2 \cdot 10^1$ **szorzat eredményére András az** 1053455154300**, Andrea az** 1053455154600 **számot kapta. Melyik lehet közülük a helyes?**

Megoldás: A szorzat osztható 8-cal, tehát a megadott szám utolsó számjegyének is oszthatónak kell lennie vele.
A 300 nem osztható 8-cal, tehát az András által közölt szám nem lehet helyes.
A szorzat osztható 9-cel, tehát a megadott szám számjegyei összegének is oszthatónak kell lennie vele.
Andrea esetében a számjegyek összege 39, az általa megadott szám emiatt nem helyes.
Az előzőek miatt sem András, sem Andrea száma nem lehet jó.

4. Legyen F **az** ABC **háromszög** AB **oldalának felezőpontja! Rajzold meg az** AC**, illetve** BC **oldalakra kifelé az** $ACPQ$**, illetve** $BCSR$ **négyzeteket! Bizonyítsd be, hogy** $PS = 2CF$ **.**

Megoldás: A C csúcs tükörképe az F pontra legyen C'. Legyen továbbá $ACB\measuredangle = \gamma$. A középpontos tükrözés tulajdonságai miatt az $AC'BC$ négyszög paralelogramma, így $AC = BC'$, valamint $CC' = 2 \cdot CF$, mert a paralelogramma átlói felezik egymást. A CBC' háromszög egybevágó a PCS háromszöggel, mert $PC = (AC =)BC'$, valamint $CS = CB$ ugyanazon négyzet oldalai. Megegyezik tehát két-két oldal. Az ezek által közbezárt szög mindkét háromszögben $180° - \gamma$, vagyis a két háromszög egybevágó. Így harmadik oldalaik is egyenlő hosszúak, azaz $PS = CC' = 2 \cdot CF$. Ezzel az állítást beláttuk.