

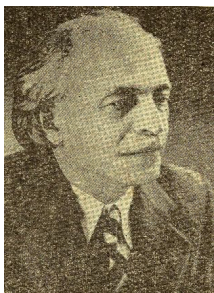
A VI. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Előadó: Bagi Márk

Előadás címe: Csillagászati előadás és kvíz



A versenyzők feladatmegoldásokon törik a fejüket.



VI. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

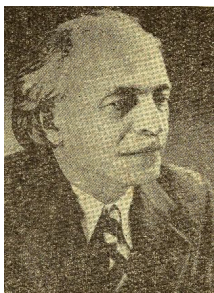
Zenta, 2008. december 13.

9. évfolyam

1. Sün Balázs és testvérei erdei sétára indultak bogyó-, falevél-, kavics-, illetve termésgyűjteményeiket gazdagítani. Mindegyiküknek van legalább egy gyűjteménye. Azok, akik bogyókat vagy terméseket gyűjtenek, azok faleveleket is gyűjtenek. Azok, akik kavicsokat gyűjtenek, azok terméseket is gyűjtenek. Azok, akik faleveleket és kavicsokat gyűjtenek, azok bogyókat is gyűjtenek. Melyik fajta gyűjteményből van a legtöbb és melyikből a legkevesebb Sün Balázsnál?
2. „Képzeld, tegnap csupán 5, 50, 500 és 5000 dinárosok felhasználásával fizettem ki 500000 dinárt.” – mondja Gazdag Géza. „És hány darabot használtál fel?” – kérdezi Okos Berci. „A négyféle címletű pénzből együttesen 500 darabot.” – válaszolja Géza. „Ez lehetetlen!” – mondja nyomban Berci. Kinek volt igaza és miért?
3. Az 1, 3, 4, 5 és egy tetszés szerint választott számjeggyel írd fel azt a legnagyobb ötjegyű számot, amelyik 12-vel osztható!
4. Ha az $ABCD$ téglalap és az AQB , valamint APD szabályos háromszögek megegyező körüljárásúak, igazold, hogy a PQ szakasz egybevágó a téglalap átlójával!

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



VI. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2008. december 13.

10. évfolyam

1. „Képzeld, tegnap csupán 5, 50, 500 és 5000 dinárosok felhasználásával fizettem ki 500000 dinárt.” – mondja Gazdag Géza. „És hány darabot használtál fel?” – kérdezi Okos Berci. „A négyféle címletű pénzből együttesen 500 darabot.” – válaszolja Géza. „Ez lehetetlen!” – mondja nyomban Berci. Kinek volt igaza és miért?

2. Határozd meg mindazokat az $n \in \mathbb{Z}$ számokat, amelyekre az

$$x^3 - nx^2 + nx - (n^2 + 1) = 0$$

egyenletnek egész megoldásai vannak ($x \in \mathbb{Z}$).

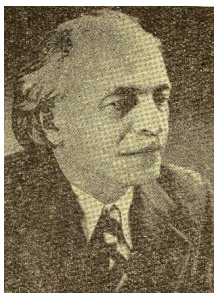
3. Egy táblára felírták az összes pozitív egész számot 1-gyel kezdve és 2008-cal bezárólag. A felírt számjegyek hány százaléka az 5-ös számjegy?

4. Az AC szakasz az $ABCD$ paralelogramma hosszabbik átlója. Húzd a $CE \perp AB$ és $CF \perp AD$ szakaszokat, vagyis a C csúcsból a nem szomszédos oldalakra húzott merőlegeseket, $F \in AD$ és $E \in AB$. Bizonyítsd be, hogy ekkor

$$|AB| \cdot |AE| + |AD| \cdot |AF| = |AC|^2.$$

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



VI. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2008. december 13.

11. évfolyam

1. Egy kis erdei tavat egy forrás táplál friss vízzel. Egyszer megjelent egy 183 tagú elefántcsorda és egy nap alatt kiitta a tó vizét. Később, mikor újra megtelt a tó, egy 37 tagú csorda 5 nap alatt itta ki a vizet. Egy elefánt hány nap alatt inná ki a tó vizét?

2. Igazold, hogy az

$$x^{\log_{2007} x} \sqrt{2007} = x^{2007}$$

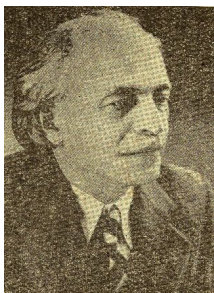
egyenlet megoldásainak szorzata természetes szám, majd határozd meg ennek a szorzatnak az utolsó két számjegyét!

3. Oldd meg a valós számok halmazán az $(x+1)^4 + (x+3)^4 = 16$ egyenletet!

4. Számítsd ki a háromoldalú gúla térfogatát, ha alapja derékszögű háromszög 8 cm és 15 cm befogókkal, oldalélei pedig 60° -os szögben hajlanak az alaplap síkjához!

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



VI. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2008. december 13.

12. évfolyam

1. Egy nemzetközi labdarugó tornán minden csapat minden csapattal pontosan egyszer játszott. Győzelemért 3, döntetlenért 1, vereségért 0 pont járt. A bajnokság végén a csapatok pontszámainak összege 15 pont volt. Az utolsó helyezett 1 pontot gyűjtött, az utolsó előtti egyszer sem kapott ki. Hány pontot gyűjtött a második helyen végzett csapat?

2. Igazold, hogy az

$$x^{\log_{2007} x} \sqrt{2007} = x^{2007}$$

egyenlet megoldásainak szorzata természetes szám, majd határozd meg ennek a szorzatnak az utolsó két számjegyét!

3. Oldd meg a $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ intervallumon a következő trigonometrikus egyenletet:

$$\cos^3 3x + \cos^3 5x = 8 \cos^3 4x \cdot \cos^3 x.$$

4. Egy henger alakú edényt, amelynek alapátmérője 4 dm és a mélysége 3 dm, teletöltöttük vízzel. Mennyi víz marad benne, ha az alap síkjához viszonyítva 30°-os szögben megdöntjük?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

A VI. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI

9. évfolyam

1. Sün Balázs és testvérei erdei sétára indultak bogyó-, falevél-, kavics-, illetve termésgyűjteményeiket gazdagítani. Mindegyiküknek van legalább egy gyűjteménye. Azok, akik bogyókat vagy terméseket gyűjtenek, azok faleveleket is gyűjtenek. Azok, akik kavicsokat gyűjtenek, azok terméseket is gyűjtenek. Azok, akik faleveleket és kavicsokat gyűjtenek, azok bogyókat is gyűjtenek. Melyik fajta gyűjteményből van a legtöbb és melyikből a legkevesebb Sün Balázsnál?

Megoldás. Legyen S_1 a bogyókat gyűjtők, S_2 a faleveleket gyűjtők, S_3 a kavicsokat gyűjtők, S_4 pedig a terméseket gyűjtők halmaza. Ekkor érvényesek az alábbi relációk:

$$(1) \quad S_1 \cup S_4 \subset S_2,$$

$$(2) \quad S_3 \subset S_4,$$

$$(3) \quad S_2 \cap S_3 \subset S_1.$$

(1)-ből és (2)-ből következik, hogy $S_3 \subset S_2$, valamint $S_3 \cap S_2 = S_3 \subset S_1$, amiből $S_1 \cup S_3 \cup S_4 \subset S_2$ következik, miszerint legtöbben faleveleket gyűjtenek.

Mivel $S_3 \subset S_1 \cap S_2 \cap S_4$, ebből adódik, hogy legkevesebben kavicsokat gyűjtenek.

2. „Képzeld, tegnap csupán 5, 50, 500 és 5000 dinárosok felhasználásával fizettem ki 500000 dinárt.” – mondja Gazdag Géza. „És hány darabot használtál fel?” – kérdezi Okos Berci. „A négyféle címletű pénzből együttesen 500 darabot.” – válaszolja Géza. „Ez lehetetlen!” – mondja nyomban Berci. Kinek volt igaza és miért?

Megoldás. Jelölje a az ötezresek, b az ötszázások, c az ötvenesek és d az ötösök számát, akkor ezekkel egyrészt

$$5000a + 500b + 50c + 5d = 500000,$$

másrészt

$$a + b + c + d = 500.$$

Ha az első egyenletet 5-tel elosztjuk és ebből kivonjuk a másodikat, akkor a

$$999a + 99b + 9c = 99500$$

egyenletet kapjuk. Ennek az egyenletnek a bal oldalán csupa 9-cel osztható tag van, tehát összegük is 9-nek többszöröse. A jobb oldalon álló 99500 azonban nem osztható 9-cel. Gazdag Géza által közölték ellentmondásra vezetnek ezért Bercinek van igaza.

3. Az 1, 3, 4, 5 és egy tetszés szerint választott számjeggyel írd fel azt a legnagyobb ötjegyű számot, amelyik 12-vel osztható!

Megoldás. Egy szám 12-vel pontosan akkor osztható, ha osztható 3-mal is és 4-gyel is. Ötjegyű számunk 3-mal akkor és csak akkor osztható, ha számjegyeinek összege is 3-nak többszöröse. Mivel az ismert négy számjegy összege 13, ezért az ötödik jegy a 2, az 5 vagy a 8 lehet csak.

A négygyel való oszthatóság szükséges és elégséges feltétele az, hogy az ötjegyű szám utolsó két jegyéből álló kétjegyű legyen a 4-nek többszöröse. Ebből persze az is adódik, hogy az utolsó jegy páros kell, hogy legyen.

Ha az ötödik jegy az 5 lenne, akkor a 14, 34, 54 valamelyike lenne ötjegyű számunk utolsó két jegyéből álló kétjegyű szám, ám ezek egyike sem osztható 4-gyel, így ez az eset nem lehetséges.

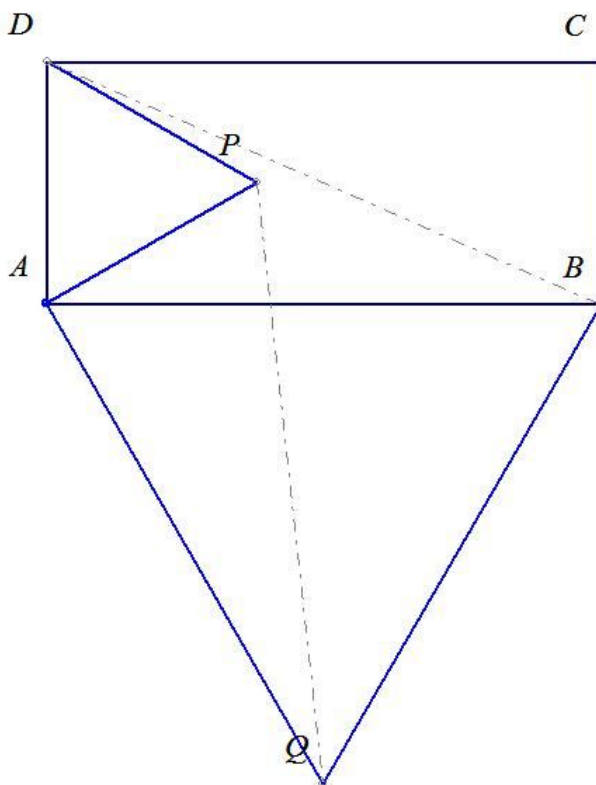
Ha a hiányzó ötödik jegy a 2, úgy az 1, 2, 3, 4, 5 jegyekből építhető 12 többszörösei között az 54312 a legnagyobb.

Ha a hiányzó ötödik jegy a 8, úgy az 1, 3, 4, 5 és 8 számjegyekből építhető 12 többszörösei között az 53184 a legnagyobb.

A lehetséges esetekből az első, az 54312 a legnagyobb. Ez tehát a megoldás.

4. Ha az $ABCD$ téglalap és az AQB , valamint APD szabályos háromszögek megegyező körüljárásúak, igazold, hogy a PQ szakasz egybevágó a téglalap átlójával!

Megoldás. Az ABD és APQ háromszögek egybevágóak a SzOSz tétel alapján, mert $|AD|=|AP|$, $|AB|=|AQ|$ és $\angle DAB \cong \angle PAQ \cong 90^\circ$, tehát harmadik oldaluk is egyenlő, azaz $|DB|=|PQ|$.



10. évfolyam

1. „Képzeld, tegnap csupán 5, 50, 500 és 5000 dinárosok felhasználásával fizettem ki 500000 dinárt.” – mondja Gazdag Géza. „És hány darabot használtál fel?” – kérdezi Okos Berci. „A négyféle címletű pénzből együttesen 500 darabot.” – válaszolja Géza. „Ez lehetetlen!” – mondja nyomban Berci. Kinek volt igaza és miért?

Megoldás. Jelölje a az ötezresek, b az ötszázások, c az ötvenesek és d az ötösök számát, akkor ezekkel egyrészt

$$5000a + 500b + 50c + 5d = 500000,$$

másrészt

$$a + b + c + d = 500.$$

Ha az első egyenletet 5-tel elosztjuk és ebből kivonjuk a másodikat, akkor a

$$999a + 99b + 9c = 99500$$

egyenletet kapjuk. Ennek az egyenletnek a bal oldalán csupa 9-cel osztható tag van, tehát összegük is 9-nek többszöröse. A jobb oldalon álló 99500 azonban nem osztható 9-cel. Gazdag Géza által közöltek ellentmondásra vezetnek ezért Bercinek van igaza.

2. Határozd meg mindazokat az $n \in \mathbb{Z}$ számokat, amelyekre az

$$x^3 - nx^2 + nx - (n^2 + 1) = 0$$

egyenletnek egész megoldásai vannak ($x \in \mathbb{Z}$).

Megoldás. Legyen p az adott egyenlet egész megoldása ($p \in \mathbb{Z}$).

Ekkor $p^3 - np^2 + np - n^2 = 1$, azaz $(p^2 + n)(p - n) = 1$.

Egész p és n esetén ez csak úgy lehetséges, hogy $1 \cdot 1 = 1$ vagy $(-1) \cdot (-1) = 1$.

(i) Legyen $p^2 + n = p - n = -1$.

Ebből $n = p + 1$ és $-1 = p^2 + (p + 1)$, amiből $p^2 + p + 2 = 0$ következik, amely egyenletnek nincs egész megoldása.

(ii) Legyen most $p^2 + n = p - n = 1$.

Ebből $n = p - 1$ és $1 = p^2 + (p - 1)$, amiből $p^2 + p - 2 = (p - 1)(p + 2) = 0$ következik, ahonnan $p = 1$ és $p = -2$ az egyenlet egész megoldásai.

Az eredeti egyenletnek tehát akkor lesznek egész megoldásai, ha $n = 0$ vagy $n = -3$, azaz, ha $n \in \{0, -3\}$.

3. Egy táblára felírták az összes pozitív egész számot 1-gyel kezdve és 2008-cal bezárólag. A felírt számjegyek hány százaléka az 5-ös számjegy?

Megoldás. Az egyjegyű számok leírásánál 1 db 5-ös számjegy található.

A kétjegyű számok leírásánál 19 db 5-ös számjegy található, az első helyen 10 és a második helyen 9 db.

A háromjegyű számok leírásánál összesen 280 db 5-ös számjegyet használunk fel, az első helyen 100, a második helyen $9 \cdot 10 = 90$, a harmadik, az egyesek helyén pedig szintén $9 \cdot 10 = 90$ db 5-ös számjegyet.

Az 1-gyel kezdődő négyjegyű számok leírásánál $1 + 19 + 280 = 300$ db 5-ös számjegyet írtunk le, míg 2000-től 2008-ig még 1 db 5-ös számjegyet használunk fel, tehát a négyjegyű számokat felírva 1000-től 2008-ig összesen 301 db 5-ös számjegyet használunk fel. Ezek szerint 1-től 2008-ig az egész számokat felírva összesen $1 + 19 + 280 + 301 = 601$ db 5-ös számjegyet írtunk fel.

Az összes leírt számjegyek száma: az egyjegyűeknél 9, a kétjegyűeknél $90 \cdot 2 = 180$, a háromjegyűeknél $900 \cdot 3 = 2700$, a négyjegyűeknél $1009 \cdot 4 = 4036$, tehát összesen 6925 számjegyet írtunk fel a táblára.

A keresett százalék: $6925 : 601 = 100 : x$, ahonnan $x = \frac{60100}{6925} \approx 8,68\%$.

4. Az AC szakasz az $ABCD$ paralelogramma hosszabbik átlója. Húzd a $CE \perp AB$ és $CF \perp AD$ szakaszokat, vagyis a C csúsból a nem szomszédos oldalakra húzott merőlegeseket, $F \in AD$ és $E \in AB$. Bizonyítsd be, hogy ekkor

$$|AB| \cdot |AE| + |AD| \cdot |AF| = |AC|^2.$$

Megoldás. Legyen G pont a B csúcs merőleges vetülete az AC átlóra, ekkor érvényes, hogy $AEC\Delta \sim AGB\Delta$, valamint $AFC\Delta \sim CGB\Delta$.

Ebből következik, hogy $\frac{|AC|}{|AE|} = \frac{|BA|}{|AG|}$ és $\frac{|AC|}{|AF|} = \frac{|BC|}{|CG|}$.

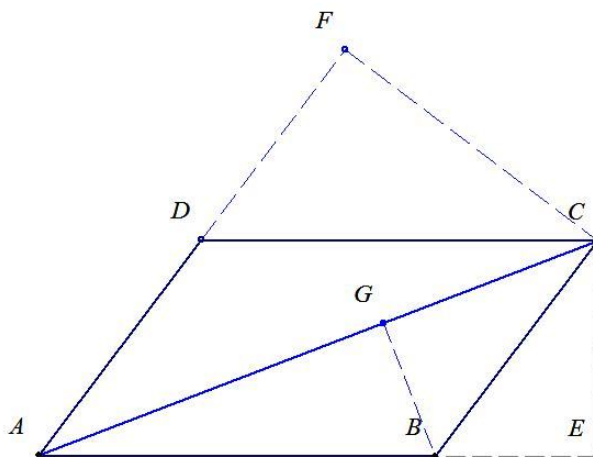
Innen $|AB| \cdot |AE| = |AC| \cdot |AG|$ és $|BC| \cdot |AF| = |AC| \cdot |CG|$.

Adjuk össze a két egyenletet. Ekkor

$$|AB| \cdot |AE| + |BC| \cdot |AF| = |AC| \cdot |AG| + |AC| \cdot |CG|$$

Adódik, ebből pedig

$$|AB| \cdot |AE| + |AD| \cdot |AF| = |AC| \cdot (|AG| + |GC|) = |AC|^2.$$



11. évfolyam

1. Egy kis erdei tavat egy forrás táplál friss vízzel. Egyszer megjelent egy 183 tagú elefántcsorda és egy nap alatt kiitta a tó vizét. Később, mikor újra megtelt a tó, egy 37 tagú csorda 5 nap alatt itta ki a vizet. Egy elefánt hány nap alatt inná ki a tó vizét?

Megoldás. Legyen a teli tó víztartalma S l, az egy napi növekmény a forrásokból n l. Mivel 183 elefánt 1 nap alatt issza ki a tó vizét, ez azt jelenti, hogy kiissza a már meglevő S litert és az egy nap alatt még hozzá befolyó n litert. Azaz 183 elefánt egy nap alatt $S + n$ liter vizet iszik meg. Ekkor, feltételezve, hogy minden elefánt egyenlő mennyiséget iszik meg, egy nap alatt egy elefánt $\frac{S + n}{183}$ liter vizet iszik meg.

A másik feltételből 37 elefánt 5 nap alatt $S + 5n$ litert iszik meg, ezért egy elefánt egy nap alatt $\frac{S + 5n}{37 \cdot 5} = \frac{S + 5n}{185}$ litert. Ebből adódik, hogy $\frac{S + n}{183} = \frac{S + 5n}{185}$, ahonnan

$S = 365n$. Tehát 183 elefánt egy nap folyamán $365n + n = 366n$ liter vizet iszik meg, amiből viszont az is következik, hogy egy elefánt egy nap alatt pontosan $2n$ litert iszik meg. Ez gyakorlatilag azt jelenti, hogy $1n$ litert fogyaszt el a teli tó vizéből és plussz azt az $1n$ litert, ami a nap folyamán befolyik a tóba. Mivel a teli tó tartalma $365n$ liter, ezért pontosan a 365-ik nap végére ürül ki teljesen a tó, ha csak egy elefánt iszik belőle.

2. Igazold, hogy az

$$x^{\log_{2007} x} \sqrt{2007} = x^{2007}$$

egyenlet megoldásainak szorzata természetes szám, majd határozd meg ennek a szorzatnak az utolsó két számjegyét!

Megoldás. Az egyenlet mindkét oldalának logaritmálása után kapjuk a

$$\log_{2007} x \cdot \log_{2007} x + \log_{2007} 2007^{\frac{1}{2}} = 2007 \log_{2007} x$$

egyenletet. Vezessük be az $a = \log_{2007} x$ helyettesítést.

Most az egyenlet ekvivalens az $a^2 - 2007a + \frac{1}{2} = 0$ másodfokú egyenlettel.

A Viete szabály alapján a kapott másodfokú egyenlet a_1 és a_2 megoldásainak összege: $a_1 + a_2 = 2007$.

Ekkor az eredeti egyenlet megoldásai $x_1 = 2007^{a_1}$ és $x_2 = 2007^{a_2}$, a szorzatuk pedig $x_1 \cdot x_2 = 2007^{a_1} \cdot 2007^{a_2} = 2007^{a_1 + a_2} = 2007^{2007}$, tehát természetes szám.

Hátra van még a kapott szorzat utolsó két számjegyének meghatározása, azaz a szorzat 100-zal való osztásakor keletkezett maradék meghatározása. Mivel $7^1 = 7$, $7^2 = 49$, $7^3 = 343$, $7^4 = 2401$, $7^5 = 16807$, ..., belátható, hogy az utolsó két számjegy ciklikusan ismétlődik: 07, 49, 43, 01, ahol a ciklus hosszúsága 4. Mivel $2007 = 4 \cdot 501 + 3$, adódik, hogy a 2007^{2007} szám utolsó két számjegye 43.

3. Oldd meg a valós számok halmazán az $(x+1)^4 + (x+3)^4 = 16$ egyenletet!

Megoldás. Legyen $y = x + 2$, ekkor $x + 1 = y - 1$ és $x + 3 = y + 1$, az egyenletünk pedig a következőképpen alakul:

$$(y-1)^4 + (y+1)^4 = 16$$

$$y^4 - 4y^3 + 6y^2 - 4y + 1 + y^4 + 4y^3 + 6y^2 + 4y + 1 = 16$$

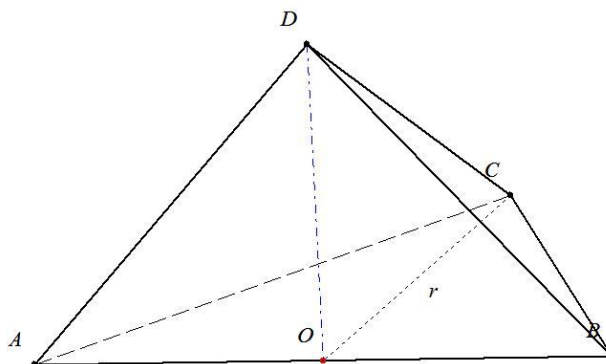
$$2y^4 + 12y^2 + 2 = 16$$

$y^4 + 6y^2 - 7 = 0$, ahonnan $y^2 = 1$ vagy $y^2 = -7$, amelyek közül csak az $y^2 = 1$ egyenletnek vannak valós megoldásai, és ezek az $y_1 = -1$ illetve az $y_2 = 1$. Ha tudjuk, hogy $y = x + 2$, akkor $x_1 = -3$ és $x_2 = -1$, vagyis a megoldáshalmaz $M = \{-3, -1\}$.

4. Számítsd ki a háromoldalú gúla térfogatát, ha alapja derékszögű háromszög 8 cm és 15 cm befogókkal, oldalélei pedig 60° -os szögben hajlanak az alaplap síkjához!

Megoldás. Legyen O pont az $ABCD$ háromoldalú gúla D csúcsának az ABC alapháromszögre vetített merőleges vetülete. Ekkor az $OADA\Delta$, $OBDA\Delta$ és $OCD\Delta$ egybevágóak, mert derékszögűek és 60° -os hegyesszögük szemben fekszik a közös OD magassággal. Tehát $|OA| \cong |OB| \cong |OC|$, vagyis az O pont az ABC háromszög körülírt körének középpontja, azaz ebben az esetben az átfogó felezőpontja. Ezért kiszámíthatjuk az alap átfogóját, $c = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17\text{cm}$, vagyis $r = \frac{17}{2}$. A test magassága DO valójában a DAB egyenlő oldalú háromszög magassága, ahonnan $H = |DO| = \frac{17\sqrt{3}}{2}$. A gúla térfogata

$$V = \frac{t_{ABC} \cdot H}{3} = 170\sqrt{3}\text{cm}^3.$$



12. évfolyam

1. Egy nemzetközi labdarugó tornán minden csapat minden csapattal pontosan egyszer játszott. Győzelemért 3, döntetlenért 1, vereségért 0 pont járt. A bajnokság végén a csapatok pontszámainak összege 15 pont volt. Az utolsó helyezett 1 pontot gyűjtött, az utolsó előtti egyszer sem kapott ki. Hány pontot gyűjtött a második helyen végzett csapat?

Megoldás. Ha egy mérkőzés eldőlt, akkor 3, ha döntetlen lesz, akkor 2 pontot osztanak el a csapatok között. Tehát annál kevesebb a csapatok pontjainak összege, minél több a döntetlen. Először állapítsuk meg a csapatok számát. ha csak 3 csapat lenne, akkor 3 mérkőzésen maximum 9 lehetne a pontszámösszeg, ha pedig 5 csapat lenne, akkor 10 meccsen minimum 20 pont kerülne kiosztásra. Így a csapatok száma 4. Ha 4 csapat van, és nincs döntetlen, a pontszámok összege 6 meccsen 18 pont. Itt a csapatok 15 pontot gyűjtöttek, és mivel minden döntetlen 1-gyel csökkenti a pontszámösszeget, ezen a tornán 3 mérkőzés végződött döntetlenre. Az utolsó előtti, azaz a harmadik helyezett csapat egy meccset sem veszített. Ha nyert volna legalább egy meccset, akkor legalább 5 pontja lenne. De akkor az előtte végzett két csapatnak is legalább 5-5 pontja lenne, ekkor azonban a csapatok összpontszáma már legalább 16 lenne. Ezek szerint a harmadik helyezett csapat minden meccse döntetlenre végződött. Az első két csapat tehát megverte az utolsót és döntetlent játszott a harmadikkal. Mivel több döntetlen nem volt, az első helyezett legyőzte a másodikat, vagyis a második helyen végzett csapat 4 pontot gyűjtött.

2. Igazold, hogy az

$$x^{\log_{2007} x} \sqrt{2007} = x^{2007}$$

egyenlet megoldásainak szorzata természetes szám, majd határozd meg ennek a szorzatnak az utolsó két számjegyét!

Megoldás. Az egyenlet mindkét oldalának logaritmálása után kapjuk a

$$\log_{2007} x \cdot \log_{2007} x + \log_{2007} 2007^{\frac{1}{2}} = 2007 \log_{2007} x$$

egyenletet.

Vezessük be az $a = \log_{2007} x$ helyettesítést.

Most az egyenlet ekvivalens az $a^2 - 2007a + \frac{1}{2} = 0$ másodfokú egyenlettel.

A Viete szabály alapján a kapott másodfokú egyenlet a_1 és a_2 megoldásainak összege: $a_1 + a_2 = 2007$.

Ekkor az eredeti egyenlet megoldásai $x_1 = 2007^{a_1}$ és $x_2 = 2007^{a_2}$, a szorzatuk pedig $x_1 \cdot x_2 = 2007^{2007}$, tehát természetes szám.

Hátra van még a kapott szorzat utolsó két számjegyének meghatározása, azaz a szorzat 100-zal való osztásakor keletkezett maradék meghatározása. Mivel $7^1 = 7$, $7^2 = 49$, $7^3 = 343$, $7^4 = 2401$, $7^5 = 16807$, ..., belátható, hogy az utolsó két számjegy ciklikusan ismétlődik: 07, 49, 43, 01, ahol a ciklus hosszúsága 4. Mivel $2007 = 4 \cdot 501 + 3$, adódik, hogy a 2007^{2007} szám utolsó két számjegye 43.

3. Oldjuk meg a $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ intervallumon a következő trigonometrikus egyenletet:

$$\cos^3 3x + \cos^3 5x = 8 \cos^3 4x \cdot \cos^3 x.$$

Megoldás. Ha tudjuk, hogy $\cos 3x + \cos 5x = 2 \cos 4x \cdot \cos x$, akkor az adott egyenlet a következőképpen alakítható:

$$\cos^3 3x + \cos^3 5x = 8 \cos^3 4x \cdot \cos^3 x$$

$$\cos^3 3x + \cos^3 5x = (2 \cos 4x \cos x)^3$$

$$\cos^3 3x + \cos^3 5x = (\cos 5x + \cos 3x)^3$$

$$\cos^3 3x + \cos^3 5x = \cos^3 5x + 3 \cos^2 5x \cos 3x + 3 \cos 5x \cos^2 3x + \cos^3 3x$$

$$0 = 3 \cos^2 5x \cos 3x + 3 \cos 5x \cos^2 3x$$

$$3 \cos 5x \cos 3x (\cos 5x + \cos 3x) = 0$$

$$\cos 5x = 0 \quad \vee \quad \cos 3x = 0 \quad \vee \quad \cos 5x + \cos 3x = 0$$

Ha $\cos 5x = 0$, akkor $5x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, vagyis $x = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5} = 18^\circ + k \cdot 36^\circ$. Innen az adott intervallumba eső megoldások a 126° és a 162° .

Ha $\cos 3x = 0$, akkor $3x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, azaz $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} = 30^\circ + k \cdot 60^\circ$. Innen az adott intervallumba eső megoldás a 150° .

Ha $\cos 3x + \cos 5x = 0$, akkor $2 \cos 4x \cos x = 0$, ahonnan $\cos 4x = 0$ vagy $\cos x = 0$.

Ha $\cos x = 0$, akkor $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, amely esetben egy megoldás sem esik az adott intervallumba.

Ha $\cos 4x = 0$, akkor $4x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, ahonnan $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4} = 22,5^\circ + k \cdot 45^\circ$.

Innen az adott intervallumba eső megoldások a $112,5^\circ$ és a $157,5^\circ$.

Összefoglalva a keresett megoldások: $112,5^\circ$; 126° ; 150° ; $157,5^\circ$; 162° .

4. Egy henger alakú edényt, amelynek alapátmérője 4 dm és a mélysége 3 dm , teletöltöttük vízzel. Mennyi víz marad benne, ha az alap síkjához viszonyítva 30° -os szögben megdöntjük?

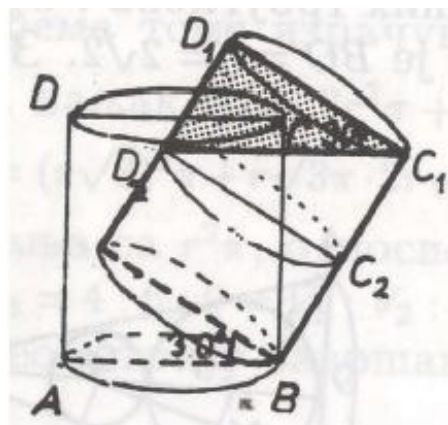
Megoldás. A megdöntés után a víz egy része kifolyt, majd vízszintes helyzetet vesz fel újból. A kiömlött víz térfogata fele annak a henger térfogatának, amelyet az ábrán látunk. Az edény térfogata ($r = 2 \text{ dm}$, $H = 3 \text{ dm}$) $V = 12\pi \text{ dm}^3$,

a kifolyt vízé $\left(r = 2 \text{ dm}, H_1 = \frac{4}{\sqrt{3}} \text{ dm}\right)$

$$\frac{1}{2}V_1 = \frac{8\sqrt{3}}{3}\pi \text{ dm}^3,$$

tehát a maradék

$$V - \frac{1}{2}V_1 = \left(12 - \frac{8\sqrt{3}}{3}\right)\pi \text{ dm}^3 \approx 23,19 \text{ liter}.$$



A VI. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY DÍJAZOTTJAI

9. évfolyam

1. Piri Annamária, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **I. díj**
2. Ripcő Ákos, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
3. Kőrösi Balázs, Műszaki Középiskola, Ada, **II. díj**
4. Gyarmati Dénes, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **III. díj**
5. Horvát Tamás, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
6. Körmöczy Andor, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **III. díj**
7. Nagygyörgy Kristóf, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**
8. Simonyi Máté, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**
9. Milinszki Hajnalka, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**
10. Pusin Igor, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**
11. Kiss Csaba, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**
12. Brusznai Borisz, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **dicséret**
13. Hajnal Andor, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**

10. évfolyam

1. Kovacsics Tamás, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **I. díj**
2. Bálint Árpád, Műszaki Középiskola, Ada, **II. díj**
3. Berec Alexandra, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **III. díj**
4. Vrbaski Iván, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**

11. évfolyam

1. Ágó Krisztina, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **I. díj**
2. Kecsenovity Egon, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **II. díj**
3. Kovacsics Tóbiás, Műszaki Középiskola, Óbecse, **III. díj**
4. Balassa Tamás, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**
5. Tóth Szabolcs, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**

12. évfolyam

1. Kanalas Vidor, Matematikai Gimnázium, Belgrád, **I. díj**
2. Takács Emese, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **II. díj**
3. Róka Gáspár, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **III. díj**
4. Bodócsi Endre, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**
5. Kasza Ákos, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **dicséret**
6. Farkas Gabriella, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**
7. Gimpel Ákos, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **dicséret**

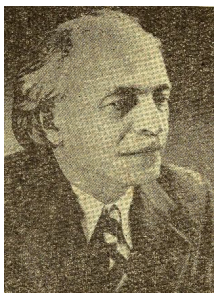
A VII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Előadó: dr. Kincses János

Előadás címe: Érdekes matematikai problémák



Verseny előtti megbeszélés (Pap Zoltán, Pap Horváth Erika, Péics Hajnalka, Miklós Gyöngyi, Csikós Pajor Gizella, Meoželj Sonja, Zolnai Irén, Ripcó Sipos Elvira, Rozsnyik Andrea, Szűcs Emese, Boros István).



VII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2009. november 28.

8. évfolyam

1. A VI. Fekete Mihály Emlékverseny első fordulója után továbbjutott a versenyzők $\frac{1}{5}$ része. A második fordulón résztvevők $\frac{2}{7}$ része került a döntőbe.

Ha az első forduló után jutott volna tovább a versenyzők $\frac{2}{7}$ része, és a második fordulón résztvevők $\frac{1}{5}$ része került volna a döntőbe, akkor a három fordulón összesen 12-nél több dolgozatot kellett volna javítani. Hányan indultak a VI. Fekete Mihály Emlékverseny első fordulóján?

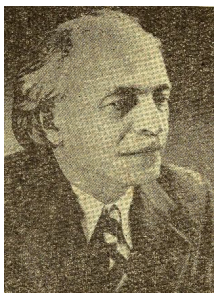
2. Melyek azok a kétjegyű természetes számok, amelyekre igaz, hogy maga a szám 17-tel nagyobb, mint számjegyeinek szorzata?

3. Egy különböző számjegyekből álló hatjegyű szám számjegyei (valamilyen sorrendben) 1, 2, 3, 4, 5, 6. Az első két számjegyből álló kétjegyű szám osztható 2-vel, az első három számjegyből álló háromjegyű szám osztható 3-mal és így tovább, maga a szám osztható 6-tal. Melyik ez a szám?

4. Jelölje egy háromszög csúcsait A , B és C . Legyen az AC oldal felezőpontja E , a BC oldal B -hez közeli harmadoló pontja D . Az AD és BE egyenesek metszéspontját jelölje F . Mekkora a BDF háromszög és az $FDCE$ négyszög területének aránya?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



VII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2009. november 28.

9. évfolyam

1. Precíz Peti felírta a számokat 1-től 10000-ig. Először aláhúzta pirossal azokat a számokat, amelyek oszthatók 4-gyel, majd aláhúzta zölddel azokat, amelyek oszthatók 5-tel, végül aláhúzta kékkel az összes 6-tal oszthatót. Hány szám lett így aláhúzva pontosan két színnel?

2. Melyek azok a kétjegyű természetes számok, amelyekre igaz, hogy maga a szám 17-tel nagyobb, mint számjegyeinek szorzata?

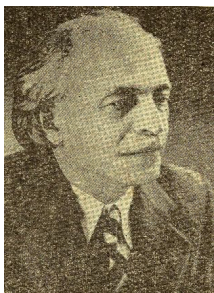
3. Egy számsorozat valamely tagját jobbminimálisnak nevezzük, ha tőle jobbra nem található nála kisebb szám. Például a (2; 1; 4; 6; 3; 7; 8; 5) sorozatban jobbminimális számok az 1 és a 3 (a jobbszélső 5-öst nem tekintjük annak). Ezek alapján az említett sorozatban a második és az ötödik helyen áll jobbminimális szám. Hány olyan sorrendje (permutációja) van az 1, 2, ..., 8 számoknak, amelyekben a második és az ötödik helyen (és esetleg másutt is) jobbminimális számok állnak?

4. Legyenek x_a , x_b és x_c az ABC hegyesszögű háromszög tetszőleges P belső pontjának rendre az a , b és c oldalaktól mért távolságai. Jelölje m_a , m_b és m_c a megfelelő oldalakhoz tartozó magasságokat. Igazold, hogy

$$\frac{x_a}{m_a} + \frac{x_b}{m_b} + \frac{x_c}{m_c} = 1.$$

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



VII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2009. november 28.

10. évfolyam

1. A gödényházi sörivó versenyen hárman kerültek a döntőbe: a tűzoltóparancsnok, a kántor és a harangozó. A kijelölt idő alatt a tűzoltóparancsnok és a kántor együtt kétszer annyi sört ivott meg, mint a harangozó. A tűzoltóparancsnok és a harangozó együttes teljesítménye viszont háromszor annyi, mint a kántoré. Ki nyerte a versenyt?

2. Egy kétjegyű szám számjegyei közé írtunk egy számjegyet. Az így kapott háromjegyű szám és az eredeti kétjegyű szám számtani közepe egyenlő az eredeti kétjegyű szám számjegyeinek felcserélésével kapott kétjegyű számmal. Mi volt az eredeti szám?

3. Az AB és CD egy O középpontú körnek két, egymásra merőleges átmérője. Az OD szakaszt felező E ponton halad az AF húr, az AB és CF szakaszok metszéspontja a G pont. Igazold, hogy az $|OB| = 3 \cdot |OG|$ és a $|CF| = 3 \cdot |DF|$.

4. Legyenek $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2009}$ pozitív valós számok.

Bizonyítsd be a következőket:

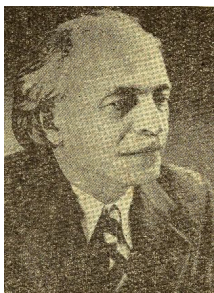
a) Minden pozitív x valós számra igaz, hogy $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$.

b) Egyidőben nem teljesülhet a következő egyenlőtlenségek mindegyike:

$$x_1(1-x_2) \leq \frac{1}{4}, x_2(1-x_3) \leq \frac{1}{4}, \dots, x_{2008}(1-x_{2009}) \leq \frac{1}{4}, x_{2009}(1-x_1) \leq \frac{1}{4}.$$

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



VII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2009. november 28.

11. évfolyam

1. A gödényházi sörivó versenyen hárman kerültek a döntőbe: a tűzoltóparancsnok, a kántor és a harangozó. A kijelölt idő alatt a tűzoltóparancsnok és a kántor együtt kétszer annyi sört ivott meg, mint a harangozó. A tűzoltóparancsnok és a harangozó együttes teljesítménye viszont háromszor annyi, mint a kántoré. Ki nyerte a versenyt?

2. Felírtuk egy táblára 1-től 2009-ig a számokat, majd valamelyik két szomszédost letöröltük, és helyettük felírtuk a különbségüket (a nagyobból kivonva a kisebbet). Ezt az eljárást addig ismételtük, míg végül csak egy szám maradt a táblán.

a) Mutassuk meg, hogy utolsó számként nem jöhet ki az 1000.

b) Adjunk egy eljárást, amely utolsó számként az 1001-et eredményezi!

3. Adott az $ABCD$ érintőnégyyszög, amelynek az alapon fekvő szögei α és β .

Igazold, hogy $\frac{|AB|}{|CD|} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}$.

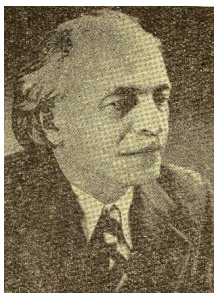
4. Bizonyítsd be, hogy az

$$x^2 - \frac{n^2 + 1}{n}x - \frac{n^2 + 1}{2n} = 0$$

egyenlet gyökei valósak és irracionális számok minden n természetes számra!

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



VII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2009. november 28.

12. évfolyam

1. Egy bank páncélszekrényén több különböző zár van. Kulcsaikat úgy osztották szét a bank négy pénztárosa között, hogy a páncélszekrény kinyitásához legalább hármuknak jelen kell lenni, de mind a négynek nem, hogy a náluk levő kulcsokkal ki lehessen nyitni az összes zárat. (Egy zárhoz többükénél is lehet kulcs, és egy embernél többféle kulcs is lehet.) Legkevesebb hány zár van a páncélszekrényen?

2. Határozd meg a $\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{1 + \sqrt{2} \sin x} = \frac{\sin^4 x - \cos^4 x}{1 + \sqrt{2} \sin x}$ egyenlet valós megoldásait!

3. Az $y = (x-1)^2 + 2$ parabola P_1 és P_2 pontjából az $A(1,2)$ és $B(1,6)$ pontok által meghatározott szakasz derékszögben látszik. Mekkora az AP_1BP_2 négyszög területe?

4. Határozd meg azt a pozitív x számot, melyre az

$$f(x) = \frac{\left(x + \frac{1}{x}\right)^6 - \left(x^6 + \frac{1}{x^6}\right) - 2}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 + \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)}$$

függvény a lehető legkisebb értékét veszi fel! Határozd is meg ezt a legkisebb értéket!

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

A VII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI

8. évfolyam

1. A VI. Fekete Mihály Emlékverseny első fordulójában továbbjutott a versenyzők $\frac{1}{5}$ része. A második fordulón résztvevők $\frac{2}{7}$ része került a döntőbe.

Ha az első forduló után jutott volna tovább a versenyzők $\frac{2}{7}$ része, és a második fordulón résztvevők $\frac{1}{5}$ része került volna a döntőbe, akkor a három fordulón összesen 12-vel több dolgozatot kellett volna javítani. Hányan indultak a VI. Fekete Mihály Emlékverseny első fordulóján?

Megoldás. Foglaljuk táblázatba a feltételeket! Mivel (még) nem ismerjük a versenyen indulók számát, jelöljük ezt x -szel.

	A versenyzők száma a valóságban	A versenyzők száma a „mi lett volna” esetén
1. fordulóban	x	x
2. fordulóban	$\frac{x}{5}$	$\frac{2x}{7}$
A döntőben	$\frac{2}{7} \cdot \frac{x}{5}$	$\frac{1}{5} \cdot \frac{2x}{7}$
A dolgozatok száma	$x + \frac{x}{5} + \frac{2x}{35}$	$x + \frac{2x}{7} + \frac{2x}{35}$

A „mi lett volna” esetén 12 dolgozattal több lenne, tehát $x + \frac{x}{5} + \frac{2x}{35} + 12 = x + \frac{2x}{7} + \frac{2x}{35}$. Az egyenlet mindkét oldalából $x + \frac{2x}{35}$ -öt levonva

$\frac{x}{5} + 12 = \frac{2x}{7}$ adódik. Szorozzuk meg ennek az egyenletnek mindkét oldalát 35-tel, és a szorzás során lehetséges egyszerűsítéseket végrehajtva nyerjük, hogy $7x + 12 \cdot 35 = 10x$. Most a $7x$ kerül levonásra, majd 3-mal egyszerűsíthetünk, s adódik: $3x = 12 \cdot 35$, azaz $x = 4 \cdot 35 = 140$. Ezt az eredményt természetesen a feladatszöveggel egybevetve ellenőriznünk kell! A 140 induló ötöde 28, ennek $\frac{2}{7}$ -e 8

és ez $140 + 28 + 8 = 176$ dolgozatot jelent. A 140-nek a $\frac{2}{7}$ -e 40, ennek ötöde 8, és a dolgozatok száma $140 + 40 + 8 = 188$ valóban 12-vel több az előbbi dolgozatszámánál. A versenyen tehát 140 induló volt az első fordulóban.

2. Melyek azok a kétjegyű természetes számok, amelyekre igaz, hogy maga a szám 17-tel nagyobb, mint számjegyeinek szorzata?

I. Megoldás. Ha a kétjegyű szám tizedeseinek számát x , egyeseinek számát pedig y jelöli, akkor a feltételek szerint kétjegyű számnkra $10x + y = xy + 17$, ahol $x \geq 1$ és $0 \leq y \leq 9$. Tegyük a fenti egyenletbe x helyére rendre a pozitív egyjegyűeket:

$$\begin{aligned} 10 + y &= y + 17, & 20 + y &= 2y + 17, & 30 + y &= 3y + 17, \\ 40 + y &= 4y + 17, & 50 + y &= 5y + 17, & 60 + y &= 6y + 17, \\ 70 + y &= 7y + 17, & 80 + y &= 8y + 17, & 90 + y &= 9y + 17. \end{aligned}$$

A fenti egyenletek közül az elsőnek nincs megoldása, a másodikat követő ötnek és az utolsónak egész megoldása nincs. A másodikat az $y = 3$, míg az utolsó előttit az $y = 9$ elégíti ki, tehát két olyan kétjegyű szám lehet, amely a feltételeket kielégíti, a 23 és a 89. Mivel $2 \cdot 3 + 17 = 23$ és $8 \cdot 9 + 17 = 89$, a 23 és a 89 valóban megoldások.

II. Megoldás: Előbbi jelölésünket megtartva a $10x + y = xy + 17$ egyenletet alakítjuk át a következőképpen: $0 = xy - 10x - y + 10 + 7$. Tettük ezt azért, hogy a jobb oldal első négy tagját szorzattá alakíthassuk, mint $0 = (x-1)(y-10) + 7$, amiből $(x-1)(y-10) = -7$. Most már látható, hogy az $x \geq 1$ és $y \leq 9$ egészek miatt a bal oldal mindkét tényezője egész szám, mégpedig az első tényező a pozitív, a második negatív. Ilyen egészek szorzata csak úgy lehet -7 , ha

$$x-1=1 \text{ és } y-10=-7$$

vagy

$$x-1=7 \text{ és } y-10=-1.$$

Az első lehetőség az $x = 2$, $y = 3$, a második az $x = 8$, $y = 9$ megoldásokat adja.

3. Egy különböző számjegyekből álló hatjegyű szám számjegyei (valamilyen sorrendben) 1, 2, 3, 4, 5, 6. Az első két számjegyből álló kétjegyű szám osztható 2-vel, az első három számjegyből álló háromjegyű szám osztható 3-mal és így tovább, maga a szám osztható 6-tal. Melyik ez a szám?

Megoldás. A hatjegyű szám második, negyedik és hatodik jegye a 2-vel, 4-gyel és 6-tal való oszthatóság miatt páros kell legyen, és az ötödik jegy az 5-tel oszthatóság miatt csak 5 lehet. Az első és a harmadik jegy tehát csakis az 1 és a 3 lehet valamilyen sorrendben. A hárommal oszthatóság miatt a második jegy csak a 2 lehet, hiszen $1+4+3$ illetve az $1+6+3$ egyike sem többszöröse a 3-nak. Így ha számunk első három jegye sorrendben az 123, úgy a 4-gyel oszthatóság miatt a negyedik jegy csak a 6 lehet, mivel 34 nem osztható 4-gyel, ekkor tehát a hatjegyű szám a 123654. Ha pedig számunk első három jegye rendre a 321, úgy a negyedik jegy ismét csak a 6, hiszen a 14 nem többszöröse a 4-nek, számunk tehát most a 321654. Mindkét esetben a 6-tal oszthatóságot a szám párossága és jegyei összegének $(1+2+3+4+5+6=21)$ 3-mal való oszthatósága biztosítja.

4. Jelölje egy háromszög csúcsait A , B és C . Legyen az AC oldal felezőpontja E , a BC oldal B -hez közeli harmadoló pontja D . Az AD és BE egyenesek metszéspontját jelölje F . Mekkora a BDF háromszög és az $FDCE$ négyszög területének aránya?

I.Megoldás. Húzzunk az E ponton át egy, az AD -vel párhuzamos egyenest. Messe ez BC -t a G -ben (ábra). Mivel az $ACD\Delta$ -ben E felezőpont és $EG \parallel AD$, ezért EG a háromszög egyik középvonala és ennél fogva G felezi a DC -t, G tehát a BC -nek C -hez közelebbi harmadolópontja. Most tekintsük a $BEG\Delta$ -et. Ebben D a BG -nek felezőpontja és $FD \parallel EG$, tehát FD középvonala a háromszögnek, azaz F felezi a BE -t. A $CDE\Delta$ területe a $BECA$ területének $\frac{2}{3}$ -a, hiszen $CD = \frac{2}{3}CB$ és ezekhez az oldalakhoz tartozó magasságaik azonosak. Így a $BDE\Delta$ területe pedig a $BECA$ területének $\frac{1}{3}$ -a. Mivel F felezi a BE -t, ezért a $BDF\Delta$ területe és az $EFDA$ területe egyenlő, éspedig a $BECA$ területének $\frac{1}{6}$ -ával. A $CDFE$ négyszög területére tehát a $BECA$ területének $\frac{5}{6}$ -a jut, és így a keresett területarány $1:5$.

II.Megoldás: Fektesünk az E ponton át egy, az CB -vel párhuzamos egyenest. Messe ez az AD -t a H pontban. Az EH középvonala az $ACD\Delta$ -nek, hiszen E felezőpont és $EH \parallel CD$. Ennél fogva $EH = \frac{1}{2}DC$. Ám a D harmadolópontja BC -nek, vagyis $BD = \frac{1}{2}DC$, tehát $EH = BD$, amiből következik, hogy az $EHBD$ négyszög paralelogramma, mert van két párhuzamos és egyenlő oldala. A paralelogrammát átlói (a BE és a DH szakaszok) négy egyenlő területű háromszögre darabolják, tehát $T_{BDF\Delta} = T_{DEF\Delta}$, ám a $BDE\Delta$ területe a $BCE\Delta$ területének $\frac{1}{3}$ -a, vagyis, $T_{BDF\Delta} = \frac{1}{6}T_{BCE\Delta}$ és ezért $T_{CDFE} = \frac{5}{6}T_{BCE\Delta}$. A keresett arány tehát $1:5$.

III.Megoldás: Húzzunk a B , a C és az E pontokon át AD -vel párhuzamos egyenest. Az E -re fektetett ilyen egyenes a DC szakaszt felezi, mert az $ACD\Delta$ -ben ez az egyenes középvonal. Húzzunk most a C , a D és az utóbb nyert G (a DC felezőpontja, azaz a BC másik harmadolópontja) pontokon át a BE -vel párhuzamost. Így az összehasonlításra váró két sokszöget egy paralelogramma-rácsba helyeztük, amelynek „rácsszemei” egybevágóak, tehát egyenlő területűek is. A 9 egybevágó lapból a $BECA$ 3 lapnyit tölt ki, hiszen a $BHCA$ területe 4.5 lapnyi, a $CEHA$ területe pedig 1.5 lapnyi. A $BFDA$ területe 0.5 lapnyi, tehát a keresett arány $0.5:2.5$, ami éppen az $1:5$ aránnyal egyenlő.

9. évfolyam

1. Precíz Peti felírta a számokat 1-től 10000-ig. Először aláhúzta pirossal azokat a számokat, amelyek oszthatók 4-gyel, majd aláhúzta zölddel azokat, amelyek oszthatók 5-tel, végül aláhúzta kékkel az összes 6-tal oszthatót. Hány szám lett így aláhúzva pontosan két színnel?

Megoldás. Piros és zöld színnel összesen 500 szám van aláhúzva, ugyanis ennyiszor van meg a 10000-ben a 4 és 5 legkisebb közös többszöröse. Zölddel és 833 szám van aláhúzva, pirossal és kékkel pedig 333. Mindegyik összegben szerepelnek azok a számok is, amelyek háromszor lett aláhúzva. Ezek száma 166. A keresett számosságot a következő számolás adja:

$$500 + 833 + 333 - 3 \cdot 166 = 1666 - 498 = 1168.$$

2. Melyek azok a kétjegyű természetes számok, amelyekre igaz, hogy maga a szám 17-tel nagyobb, mint számjegyeinek szorzata?

I. Megoldás. Ha a kétjegyű szám tízeinek számát x , egyeseinek számát pedig y jelöli, akkor a feltételek szerint kétjegyű számokra $10x + y = xy + 17$, ahol $x \geq 1$ és $0 \leq y \leq 9$. Tegyük a fenti egyenletbe x helyére rendre a pozitív egyjegyűeket:

$$10 + y = y + 17, \quad 20 + y = 2y + 17, \quad 30 + y = 3y + 17,$$

$$40 + y = 4y + 17, \quad 50 + y = 5y + 17, \quad 60 + y = 6y + 17,$$

$$70 + y = 7y + 17, \quad 80 + y = 8y + 17, \quad 90 + y = 9y + 17.$$

A fenti egyenletek közül az elsőnek nincs megoldása, a másodikat követő ötnek és az utolsónak egész megoldása nincs. A másodikat az $y = 3$, míg az utolsó előtti az $y = 9$ elégíti ki, tehát két olyan kétjegyű szám lehet, amely a feltételeket kielégíti, a 23 és a 89. Mivel $2 \cdot 3 + 17 = 23$ és $8 \cdot 9 + 17 = 89$, a 23 és a 89 valóban megoldások.

II. Megoldás: Előbbi jelölésünket megtartva a $10x + y = xy + 17$ egyenletet alakítjuk át a következőképpen: $0 = xy - 10x - y + 10 + 7$. Tettük ezt azért, hogy a jobb oldal első négy tagját szorzattá alakíthassuk, mint $0 = (x-1)(y-10) + 7$, amiből $(x-1)(y-10) = -7$. Most már látható, hogy az $x \geq 1$ és $y \leq 9$ egészek miatt a bal oldal mindkét tényezője egész szám, mégpedig az első tényező a pozitív, a második negatív. Ilyen egészek szorzata csak úgy lehet -7 , ha

$$x - 1 = 1 \text{ és } y - 10 = -7$$

vagy

$$x - 1 = 7 \text{ és } y - 10 = -1.$$

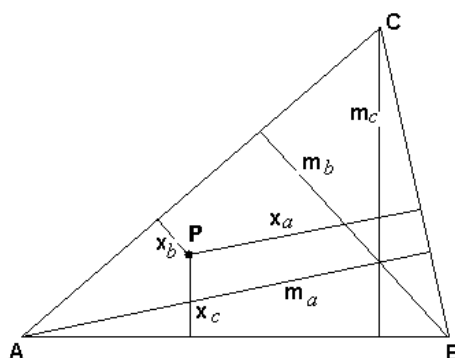
Az első lehetőség az $x = 2$, $y = 3$, a második az $x = 8$, $y = 9$ megoldásokat adja.

3. Egy számsorozat valamely tagját jobbminimálisnak nevezzük, ha tőle jobbra nem található nála kisebb szám. Például a (2; 1; 4; 6; 3; 7; 8; 5) sorozatban jobbminimális számok az 1 és a 3 (a jobbszélső 5-öst nem tekintjük annak). Ezek alapján az említett sorozatban a második és az ötödik helyen áll jobbminimális szám. Hány olyan sorrendje (permutációja) van az 1, 2, ..., 8 számoknak, amelyekben a második és az ötödik helyen (és esetleg másutt is) jobbminimális számok állnak?

Megoldás. Állítsuk össze a keresett permutációt balról jobbra haladva. Az első helyen a 8 szám közül bármelyik állhat. A második szám egyértelműen meghatározott, hiszen csak akkor lehet jobbminimális, ha a megmaradt számok közül a legkisebbet választjuk. A harmadik és a negyedik szám a megmaradtak közül bármelyik lehet. Az ötödik szám ismét kizárólag a még fel nem használt 4 szám közül a legkisebb lehet. A megmaradt 3 számot beírhatjuk tetszőleges sorrendben. Ez összesen $8 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 1440$ lehetséges sorrendet ad.

4. Legyenek x_a , x_b és x_c az ABC hegyesszögű háromszög tetszőleges P belső pontjának rendre az a , b és c oldalaktól mért távolságai. Jelölje m_a , m_b és m_c a megfelelő oldalakhoz tartozó magasságokat. Igazold, hogy

$$\frac{x_a}{m_a} + \frac{x_b}{m_b} + \frac{x_c}{m_c} = 1.$$



Megoldás. Mivel

$$Ter(BCP) + Ter(CAP) + Ter(ABP) = Ter(ABC),$$

így elosztva mindkét oldalt $Ter(ABC)$ -vel adódik:

$$\frac{Ter(BCP)}{Ter(ABC)} + \frac{Ter(CAP)}{Ter(ABC)} + \frac{Ter(ABP)}{Ter(ABC)} = 1.$$

Behelyettesítve sorban a megfelelő háromszögek területeit kapjuk, hogy

$$\frac{\frac{a \cdot x_a}{2}}{\frac{a \cdot m_a}{2}} + \frac{\frac{b \cdot x_b}{2}}{\frac{b \cdot m_b}{2}} + \frac{\frac{c \cdot x_c}{2}}{\frac{c \cdot m_c}{2}} = 1.$$

Elvégezve az egyszerűsítéseket megkapjuk a keresett egyenlőséget, azaz hogy

$$\frac{x_a}{m_a} + \frac{x_b}{m_b} + \frac{x_c}{m_c} = 1.$$

10. évfolyam

1. A gödényházi sörivó versenyen hárman kerültek a döntőbe: a tűzoltóparancsnok, a kántor és a harangozó. A kijelölt idő alatt a tűzoltóparancsnok és a kántor együtt kétszer annyi sört ivott meg, mint a harangozó. A tűzoltóparancsnok és a harangozó együttes teljesítménye viszont háromszor annyi, mint a kántoré. Ki nyerte a versenyt?

I.Megoldás. Jelöljük a tűzoltóparancsnok, a kántor és a harangozó által elfogyasztott sörmennyiséget rendre t -vel, k -val és h -val. Ekkor

$$t + k = 2h \text{ és } t + h = 3k.$$

A két egyenletet kivonva adódik, hogy $k - h = 2h - 3k$, azaz $4k - 3h$, ahonnan belátható, hogy $h > k$.

Megállapíthatjuk tehát, hogy a kántor nem nyerhetett, ezért most már elegendő a tűzoltóparancsnok és a harangozó teljesítményét összehasonlítani. Ehhez a fenti egyenletrendszert úgy alakítjuk, hogy k essen ki belőle (3-mal szorozzuk az elsőt és hozzáadjuk a másodikhoz), azaz $4t + 3k + h = 6h + 3k$, ahonnan $4t = 5h$, vagyis $t > h$. Tehát a tűzoltóparancsnok nyert.

II.Megoldás. A tűzoltóparancsnok olyan vödört készített, amelynek térfogata pontosan az ő általa elfogyasztott sör mennyiségével egyezett meg. Így az ő teljesítménye 1 vödör volt. Jelöljük továbbra is a kántor és a harangozó által elfogyasztott sörmennyiséget rendre k -val és h -val. Ekkor a verseny jegyzőkönyve alapján tapasztaltakat már felírhatjuk kétismeretlenes egyenletrendszerrel:

$$1 + k = 2h \text{ és } 1 + h = 3k.$$

Az első egyenletből $k = 2h - 1$, ezt a második egyenletbe helyettesítve $1 + h = 3(2h - 1)$ adódik. Ebből

$$h = \frac{4}{5} \text{ és } k = 2h - 1 = 2 \cdot \frac{4}{5} - 1 = \frac{3}{5}.$$

Mivel k és h kisebb 1-nél, ezért a tűzoltóparancsnok nyert.

III.Megoldás.

A tűzoltóparancsnok és a kántor együtt kétszer annyi sört ivott meg, mint a harangozó.

Eszerint a harangozó teljesítménye átlagos.

Vagy van nála jobb és gyengébb, vagy mindhárom egyforma.

A tűzoltóparancsnok és a harangozó együttes teljesítménye háromszor annyi, mint a kántoré.

Eszerint viszont, ha a kántor helyére a harangozó kerül a kétfős csapatba, akkor a kétfős csapat teljesítménye javul a kimaradt egy főhöz képest, tehát a harangozó teljesítménye nagyobb a kántorénál.

A fentiekből belátható, hogy a sorrend: tűzoltóparancsnok, kántor, harangozó.

2. Egy kétjegyű szám számjegyei közé írtunk egy számjegyet. Az így kapott háromjegyű szám és az eredeti kétjegyű szám számtani közepe egyenlő az eredeti kétjegyű szám számjegyeinek felcserélésével kapott kétjegyű számmal. Mi volt az eredeti szám?

Megoldás. Legyen az $\overline{ab}$ kétjegyű szám, k pedig a számjegyei közé írt harmadik számjegy. A feltételek alapján $\frac{\overline{ab} + \overline{akb}}{2} = \overline{ba}$, vagyis a háromjegyű szám kisebb 200-nál (másképpen a számtani közép is háromjegyű). Tehát az $a=1$ és akkor $10 + b + 100 + 10k + b = 20b + 2$, amely alapján $108 + 10k = 18b$, azaz $5k = 9(b-6)$, tehát 9 osztója az $5k$ -nak, így a $k=0$ vagy $k=9$. Ha $k=0$, akkor az eredeti szám 16. Ha $k=9$, akkor $54 + 45 = 9b$, $b=11$ pedig nem lehetséges.

3. Az AB és CD egy O középpontú körnek két, egymásra merőleges átmérője. Az OD szakaszt felező E ponton halad az AF húr, az AB és CF szakaszok metszéspontja a G pont. Igazold, hogy az $|OB|=3 \cdot |OG|$ és a $|CF|=3 \cdot |DF|$.

Megoldás. Jelölje r a kör sugarát. Az $AOE\Delta \approx AFB\Delta$, mert két megfelelő szögük egyenlő. Ugyanakkor $BFC\angle = CFA\angle = AFD\angle$ (azonos hosszúságú ívekhez tartozó kerületi szögek), ezért GF szögfelező az $AFB\Delta$ -ben, tehát $\frac{|AG|}{|GB|} = \frac{|AF|}{|BF|} = \frac{2}{1}$, amiből $|OG| = r - \frac{2}{3}r = \frac{1}{3}r = \frac{1}{3}|OB|$, azaz $|OB|=3 \cdot |OG|$. Mivel $|DE| = \frac{1}{2}r$ és $|CE| = \frac{3}{2}r$, ezért mivel EF szögfelező a $CFD\Delta$ -ben, így $\frac{|DF|}{|CF|} = \frac{|DE|}{|CE|} = \frac{1}{3}$, azaz $|CF|=3 \cdot |DF|$.

4. Legyenek $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2009}$ pozitív valós számok.

Bizonyítsd be a következőket:

a) Minden pozitív x valós számra igaz, hogy $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$.

b) Egyidőben nem teljesülhet a következő egyenlőtlenségek mindegyike:

$$x_1(1-x_2) > \frac{1}{4}, x_2(1-x_3) > \frac{1}{4}, \dots, x_{2008}(1-x_{2009}) > \frac{1}{4}, x_{2009}(1-x_1) > \frac{1}{4}.$$

Megoldás. a)

$$x(1-x) \leq \frac{1}{4}, \text{ ebből } x^2 - x \leq \frac{1}{4}, \text{ ahonnan } 4x^2 - 4x \leq 1, \text{ azaz } (2x-1)^2 \geq 0.$$

b) Tegyük fel, hogy léteznek az állításban szereplő olyan $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2009}$ pozitív valós számok, amelyekre egyidőben teljesülnek a fenti egyenlőtlenségek. Ekkor összeszorozva az egyenlőtlenségeket azt kapjuk, hogy

$$x_1(1-x_1) \cdot x_2(1-x_2) \cdot \dots \cdot x_{2009}(1-x_{2009}) > \frac{1}{4^{2009}}$$

Mivel $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ minden x pozitív valós szám esetén, így

$$x_1(1-x_1) \cdot x_2(1-x_2) \cdot \dots \cdot x_{2009}(1-x_{2009}) \leq \frac{1}{4^{2009}}$$

adódik, ami ellentmondást eredményez, tehát a b) állítás igaz.

11. évfolyam

1. A gödényházi sörivó versenyen hárman kerültek a döntőbe: a tűzoltóparancsnok, a kántor és a harangozó. A kijelölt idő alatt a tűzoltóparancsnok és a kántor együtt kétszer annyi sört ivott meg, mint a harangozó. A tűzoltóparancsnok és a harangozó együttes teljesítménye viszont háromszor annyi, mint a kántoré. Ki nyerte a versenyt?

I.Megoldás. Jelöljük a tűzoltóparancsnok, a kántor és a harangozó által elfogyasztott sörmennyiséget rendre t -vel, k -val és h -val. Ekkor

$$t + k = 2h \text{ és } t + h = 3k.$$

A két egyenletet kivonva adódik, hogy $k - h = 2h - 3k$, azaz $4k - 3h$, ahonnan belátható, hogy $h > k$.

Megállapíthatjuk tehát, hogy a kántor nem nyerhetett, ezért most már elegendő a tűzoltóparancsnok és a harangozó teljesítményét összehasonlítani. Ehhez a fenti egyenletrendszert úgy alakítjuk, hogy k essen ki belőle (3-mal szorozzuk az elsőt és hozzáadjuk a másodikhoz), azaz $4t + 3k + h = 6h + 3k$, ahonnan $4t = 5h$, vagyis $t > h$. Tehát a tűzoltóparancsnok nyert.

II.Megoldás. A tűzoltóparancsnok olyan vödört készített, amelynek térfogata pontosan az ő általa elfogyasztott sör mennyiségével egyezett meg. Így az ő teljesítménye 1 vödör volt. Jelöljük továbbra is a kántor és a harangozó által elfogyasztott sörmennyiséget rendre k -val és h -val. Ekkor a verseny jegyzőkönyve alapján tapasztaltakat már felírhatjuk kétismeretlenes egyenletrendszerrel:

$$1 + k = 2h \text{ és } 1 + h = 3k.$$

Az első egyenletből $k = 2h - 1$, ezt a második egyenletbe helyettesítve $1 + h = 3(2h - 1)$ adódik. Ebből

$$h = \frac{4}{5} \text{ és } k = 2h - 1 = 2 \cdot \frac{4}{5} - 1 = \frac{3}{5}.$$

Mivel k és h kisebb 1-nél, ezért a tűzoltóparancsnok nyert.

III.Megoldás.

A tűzoltóparancsnok és a kántor együtt kétszer annyi sört ivott meg, mint a harangozó.

Eszerint a harangozó teljesítménye átlagos.

Vagy van nála jobb és gyengébb, vagy mindhárom egyforma.

A tűzoltóparancsnok és a harangozó együttes teljesítménye háromszor annyi, mint a kántoré.

Eszerint viszont, ha a kántor helyére a harangozó kerül a kétfős csapatba, akkor a kétfős csapat teljesítménye javul a kimaradt egy főhöz képest, tehát a harangozó teljesítménye nagyobb a kántorénál.

A fentiekből belátható, hogy a sorrend: tűzoltóparancsnok, kántor, harangozó.

2. Felírtuk egy táblára 1-től 2009-ig a számokat, majd valamelyik két szomszédost letöröltük, és helyettük felírtuk a különbségüket (a nagyobból kivonva a kisebbet). Ezt az eljárást addig ismételtük, míg végül csak egy szám maradt a táblán.

a) Mutassuk meg, hogy utolsó számként nem jöhet ki az 1000.

b) Adjunk egy eljárást, amely utolsó számként az 1001-et eredményezi!

Megoldás: a) Ha a számsorozatból kihúzok két számot és helyükbe írom a különbségüket (a nagyobból kivonva a kisebbet), akkor a és b szám esetén ($a < b$) a számsorozat tagjainak az összege

$$-a - b + (b - a) = -2a$$

szerint változik, vagyis a kisebb szám kétszeresével csökken. Ezek szerint az összeg paritása nem változik. A természetes számokat összegezve 2009-ig páratlan számot kapunk, mert négy szomszédos szám (két páratlan és két páros szám) összege mindig páros. 2008-ig a számok felbonthatók ilyen szomszédos számok alkotta számnégyesekre, tehát összegük is páros. Ehhez hozzáadva a 2009-et páratlan számot kapunk.

A fentiek alapján 1000-et nem kaphatunk végeredményként, mivel páros szám, a kiindulásul vett számsorozat tagjainak összege pedig páratlan.

b) Az előző rész fejtegetése alapján nem lehetetlen, hogy találjunk egy ilyen eljárást. Figyeljük ismét a szomszédos számokból képzett számnégyeseket. A zárójelbe tett számokat cseréljük ki a különbségükre:

$$\begin{array}{c} a, a+1, a+2, a+3 \\ (a, a+1), (a+2, a+3) \\ 1, \quad 1 \\ (1, \quad 1) \\ 0 \end{array}$$

vagyis szomszédos számokból álló számnégyesek nullára cserélhetők. Könnyen belátható, hogy tetszőleges számú 0 sorozatos cserékkel egyetlen 0-ra cserélhető. Ezek alapján:

$$\begin{array}{c} 1, 2, 3, 4, \quad 5, 6, 7, 8, \quad \dots, \quad 997, 998, 999, 1000, \quad 1001, \\ 1002, 1003, 1004, 1005, \quad \dots, \quad 2006, 2007, 2008, 2009 \\ (1, 2, 3, 4), \quad \dots, \quad (997, 998, 999, 1000), \quad 1001, \quad (1002, 1003, 1004, 1005), \quad \dots, \quad (2006, 2007, 2008, 2009) \\ 0, \quad \dots, \quad 0, \quad 1001, \quad 0, \quad \dots, \quad 0 \\ 0, \quad 1001, \quad 0 \\ 1001, \quad 0 \\ (1001, \quad 0) \\ 1001 \end{array}$$

Más megfelelő eljárás is létezik.

3. Legyen az $ABCD$ trapéz érintőnégyyszög, amelynek az alapon fekvő szögei α

és β . Igazold, hogy $\frac{|AB|}{|CD|} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}$.

Megoldás. Legyen S az $ABCD$ trapéz beírt körének középpontja, és jelölje a beírt kör érintési pontjait az AB és CD oldalakkal rendre M és M_1 . Ekkor

12. évfolyam

1. Egy bank páncélszekrényén több különböző zár van. Kulcsaikat úgy osztották szét a bank négy pénztárosa között, hogy a páncélszekrény kinyitásához legalább hármuknak jelen kell lenni, de mind a négynek nem, hogy a náluk levő kulcsokkal ki lehessen nyitni az összes zárat. (Egy zárhoz többükénél is lehet kulcs, és egy embernél többféle kulcs is lehet.) Legkevesebb hány zár van a páncélszekrényen?

Megoldás. Megmutatjuk, hogy legalább 6 zár van a páncélszekrényen. Mivel két pénztáros jelenléte kevés a nyitáshoz, ezért bármelyik két pénztáros együttes kulcskészletéből legalább egy zár kulcsa hiányzik. Bármelyik pénztáros párosnak más-más kulcsa hiányzik a szekrény kinyitásához, mivel ha volna két páros, akikkel ugyanannak a kulcsnak a hiánya miatt nem lehet a páncélszekrényt kinyitni, akkor a párosokból való három pénztáros nem tudná kinyitni, holott a feltétel szerint ennyi pénztáros erre mindig képes. A négy pénztárosból hatféleképpen választható ki kettő, tehát a fentiek miatt legalább ennyi zár van.

Ha a pénztárosokat A, B, C és D jelöli, a zárat, illetve a hozzájuk tartozó kulcsokat az 1, 2, 3, 4, 5 és 6, akkor az alábbi táblázat mutatja, hogy 6 zárra teljesülhet valamennyi feltétel (a + jelenti a pénztárosnál levő kulcsot):

	1	2	3	4	5	6
A	+	+	+			
B	+			+	+	
C		+		+		+
D			+		+	+

2. Határozd meg a $\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{1 + \sqrt{2} \sin x} = \frac{\sin^4 x - \cos^4 x}{1 + \sqrt{2} \sin x}$ egyenlet valós megoldásait!

Megoldás. Szorozzuk meg az egyenletet $1 + \sqrt{2} \sin x$ -el, ekkor $1 + \sqrt{2} \sin x \neq 0$, ahonnan $\sin x \neq -\frac{\sqrt{2}}{2}$, vagyis $x \neq \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ és $x \neq \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$. Ekkor az egyenlet így alakul:

$$\begin{aligned}
 \sin^3 x + \cos^3 x &= \sin^4 x - \cos^4 x \\
 (\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x) &= (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) \\
 (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x) &= (\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x) \cdot 1 \\
 (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x) - (\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x) &= 0 \\
 (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x - \sin x + \cos x) &= 0 \\
 (\sin x + \cos x) = 0 \quad \vee \quad (1 - \sin x \cos x - \sin x + \cos x) &= 0 \\
 (1 - \sin x)(1 + \cos x) &= 0 \\
 1 - \sin x = 0 \quad \vee \quad 1 + \cos x &= 0
 \end{aligned}$$

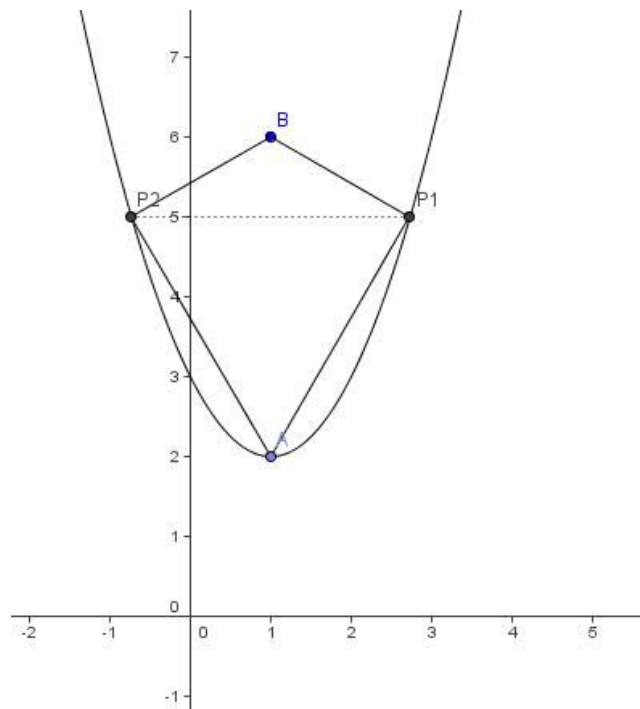
$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{3\pi}{4} + 2k\pi & \sin x &= 1 & \cos x &= -1 \\x_2 &= \frac{7\pi}{4} + 2k\pi & x_3 &= \frac{\pi}{2} + 2k\pi & x_4 &= \pi + 2k\pi\end{aligned}$$

Mivel $x_2 = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$ értéket kizártuk, így az adott trigonometrikus egyenlet megoldása az $M = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \pi + 2k\pi \right\}$ halmaz.

3. Az $y = (x-1)^2 + 2$ parabola P_1 és P_2 pontjából az $A(1,2)$ és $B(1,6)$ pontok által meghatározott szakasz derékszögben látszik. Mekkora az AP_1BP_2 négyszög területe?

Megoldás. Mivel a P_1 és P_2 pontokból az AB szakasz derékszögben látszik, ezért P_1 és P_2 illeszkedik az AB szakasz Thálesz-körére, amelynek középpontja a $C(1,4)$ pont, sugara 2, az egyenlete tehát $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 4$. Mivel P_1 és P_2 illeszkedik a parabolára is, így $y = (x-1)^2 + 2$ -től a kör egyenletébe helyettesítve $(x-1)^2 + [(x-1)^2 + 2 - 4]^2 = 4$. Ennek az egyenletnek a megoldásai $x_1 = 1$, $x_2 = 1 - \sqrt{3}$, $x_3 = 1 + \sqrt{3}$. $x_1 = 1$ az A, B pontokat adják, a másik kettőből $y = 5$.

Így az AP_1BP_2 négyszög deltoid, területe $t = \frac{AB \cdot P_1P_2}{2} = 4\sqrt{3}$.



4. Határozd meg azt a pozitív x számot, melyre az

$$f(x) = \frac{\left(x + \frac{1}{x}\right)^6 - \left(x^6 + \frac{1}{x^6}\right) - 2}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 + \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)}$$

függvény a lehető legkisebb értékét veszi fel! Határozd is meg ezt a legkisebb értéket!

Megoldás. Vezessük be az $x + \frac{1}{x} = t$ helyettesítést. Ekkor

$$\begin{aligned} x^3 + \frac{1}{x^3} &= \left(x + \frac{1}{x}\right) \left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2}\right) = \\ &= \left(x + \frac{1}{x}\right) \left(\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 3\right) = t(t^2 - 3) \\ x^6 + \frac{1}{x^6} + 2 &= \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)^2 = t^2 \cdot (t^2 - 3)^2 \end{aligned}$$

ezért

$$f(x) = \frac{t^6 - t^2(t^2 - 3)^2}{t^3 + t(t^2 - 3)} = \frac{6t^4 - 9t^2}{2t^3 - 3t} = 3t$$

mivel $t \geq 2$, ezért $f(x) \geq 6$, tehát f legkisebb értéke 6, ha $x = 1$.

A VII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY DÍJAZOTTJAI

8. évfolyam

1. Bíró Dominik, Kizúr István Általános Iskola, Szabadka, **I. díj**
2. Horti Krisztina, Stevan Sremac Általános Iskola – Emlékiskola, Zenta, **I. díj**
3. Pósa Vivien, Kis Ferenc Általános Iskola, Orom, **III. díj**
4. Pataki Zsóka, Stevan Sremac Általános Iskola – November 11, Zenta, **dicséret**
5. Vörös Friderika, Stevan Sremac Általános Iskola – November 11, Zenta, **dicséret**

9. évfolyam

1. Nagy Henrietta, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
2. Gyorgyevics Elvira, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **III. díj**
3. Kiskároly Tímea, Dositej Obradović Gimnázium, Topolya, **III. díj**
4. Pletikoszity Johanna, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **dicséret**
5. Somogyi Hunor, Műszaki Iskola, Szabadka, **dicséret**

10. évfolyam

1. Piri Annamária, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **I. díj**
2. Ripcő Ákos, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
3. Körmöczy Andor, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
4. Pusin Igor, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **III. díj**
5. Gyarmati Dénes, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **III. díj**
6. Kőrösi Balázs, Műszaki Középiskola, Ada, **III. díj**

11. évfolyam

1. Kovacsics Tamás, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
2. Bálint Árpád, Műszaki Középiskola, Ada, **I. díj**
3. Farkas Laura, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **II. díj**
4. Vrbaski Iván, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**

12. évfolyam

1. Kecsenovics Egon, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **I. díj**
2. Balassa Tamás, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
3. Tóth Szabolcs, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
4. Ágó Krisztina, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
5. Kovacsics Tóbiás, Műszaki Középiskola, Óbecse, **III. díj**
6. Berec Alexandra, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**
7. Guzsvány Szandra, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**



Díjazottak

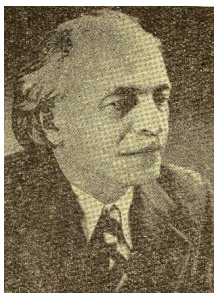
A VIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Előadó: dr. Klukovits Lajos

Előadás címe: Egy művészetből született tudomány, a projektív geometria



Készülődés a versenyre.



VIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2010. december 4.

8. évfolyam

1. A nyáron egy kis faluban volt az osztály kirándulni. Az egyetlen bolt árukészlete minden reggel ugyanaz volt. Mi voltunk az első vásárlók és a kiflik felét, a zsemlék negyedét, a tej egy ötödét elvittük, és ezért 1800 dinárt fizettünk. Másnap az előző napival azonos árukészletből a kifliknek és a zsemléknek is a harmadát, a tejnek negyedét vittük el és most 1500 dinárt fizettünk. Harmadnap megint másként rendeltek az osztálytársak, és most a kiflik hatodát, a zsemlék öt tizenketted részét, a tejnek három tized részét vittük el. Mennyit fizettünk a harmadik napon?

2. Egy dobozban 23 piros, 15 kék, 20 fehér és valahány zöld sapka van. Ezek csak a színükben különböznek. A dobozból csukott szemmel találomra vehetünk ki sapkákat. Adott az alábbi három igaz állítás:

(1) Ha kiveszünk 63 sapkát, biztosan van köztük fehér.

(2) Legalább 59 sapkát kell kivennünk ahhoz, hogy biztosan legyen köztük zöld.

(3) Legfeljebb 53 sapkát vehetünk ki úgy, hogy ne legyen köztük piros.

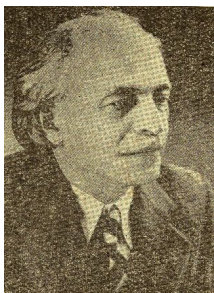
El lehet-e dönteni a fenti állításokból, hogy pontosan hány zöld sapka van a dobozban? Indokold!

3. Add meg az $x^2y + x^2 = 180$ egyenlet pozitív egész megoldásait!

4. Az ABC háromszögben $\alpha = \beta + 90^\circ$. Tükrözzük a háromszöget a C csúcsból induló magasságvonalra. Így kapjuk az $A'B'C'$ háromszöget. Bizonyítsd be, hogy a BCA' háromszög derékszögű!

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



VIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2010. december 4.

9. évfolyam

1. Egy matematika teszt megírásában egy középiskola 100 tanulója vett részt, és az átlagpontszámuk 100 pont volt. Az alsóévesek száma 50%-kal több, mint a felsőéveseké, a felsőévesek átlaga pedig 50%-kal több, mint az alsóéveseké. Mennyi a felsőévesek átlagpontszáma?

2. Melyik az a legnagyobb természetes szám, amely kisebb a számjegyei négyzetösszegénél?

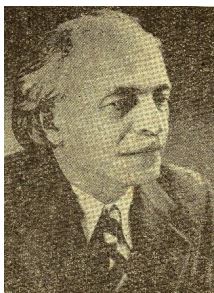
3. Az ABC egyenlőszárú háromszögben ($|AC| = |BC|$) a B csúcsnál lévő belső szög szögfelezője a szemközti oldalt egy P pontban metszi. Bizonyítsd be, hogy $|BP| < 2|AP|$.

4. Egy dobozban 23 piros, 15 kék, 20 fehér és valahány zöld sapka van. Ezek csak a színükben különböznek. A dobozból csukott szemmel találomra vehetünk ki sapkákat. A következő négy állításból pontosan három igaz.

- (1) Ha kiveszünk 63 sapkát, biztosan van köztük fehér.
 - (2) Legalább 59 sapkát kell kivennünk ahhoz, hogy biztosan legyen köztük zöld.
 - (3) Ha kiveszünk 46 sapkát, lehet, hogy nincs köztük sem piros, sem kék.
 - (4) Legfeljebb 53 sapkát vehetünk ki úgy, hogy ne legyen köztük piros.
- Hány zöld sapka van a dobozban?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



VIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2010. december 4.

10. évfolyam

1. Ha a és b valós számok és $ab \in [-1,1]$, akkor igazold, hogy

$$(a + b + 2)^2 \geq 4(a + b)(ab + 1).$$

2. Egy szöcske ugrál a kör kerületén az óramutató járásával megegyező irányba. Az első ugrásnak egy 1° -os középponti szög felel meg, a második ugrásnak egy 2° -os középponti szög felel meg, és általában a k -adik ugrásának egy k° -os középponti szög felel meg. Hányadik ugrásával kerül először olyan pontra, ahol már járt?

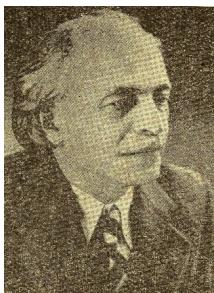
3. Az ABC háromszög oldalain adottak az $M \in BC$, $N \in AC$ és $P \in AB$ pontok úgy, hogy AM , BN és CP egyenesek egy pontban Q -ban metszik egymást. Határozd meg a háromszög A és B szögeinek mértékét, ha $BAM \angle = 20^\circ$, $ABN \angle = 30^\circ$, $BCP \angle = 20^\circ$ és $ACP \angle = 30^\circ$.

4. Egy dobozban 23 piros, 15 kék, 20 fehér és valahány zöld sapka van. Ezek csak a színükben különböznek. A dobozból csukott szemmel találomra vehetünk ki sapkákat. A következő négy állításból pontosan három igaz.

- (1) Ha kiveszünk 63 sapkát, biztosan van köztük fehér.
 - (2) Legalább 59 sapkát kell kivennünk ahhoz, hogy biztosan legyen köztük zöld.
 - (3) Ha kiveszünk 46 sapkát, lehet, hogy nincs köztük sem piros, sem kék.
 - (4) Legfeljebb 53 sapkát vehetünk ki úgy, hogy ne legyen köztük piros.
- Hány zöld sapka van a dobozban?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



VIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2010. december 4.

11. évfolyam

1. Egy szöcske ugrál a kör kerületén az óramutató járásával megegyező irányba. Az első ugrásnak egy 1° -os középponti szög felel meg, a második ugrásnak egy 2° -os középponti szög felel meg, és általában a k -adik ugrásának egy k° -os középponti szög felel meg. Hányadik ugrásával kerül először olyan pontra, ahol már járt?

2. Igazold, hogy nem léteznek olyan m és n pozitív egész számok, amelyekre $m^2 + 4n$ és $n^2 + 4m$ is négyzetszám!

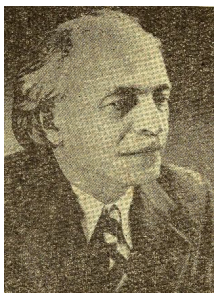
3. Bizonyítsd be, hogy:

$$\frac{1}{\cos x} + 2 \frac{\cos x}{\cos 2x} + 4 \frac{\cos 3x}{\cos 4x} + 8 \frac{\cos 7x}{\cos 8x} = 16 \frac{\sin 15x}{\sin 16x}.$$

4. Melyik a nagyobb, $\log_{2011} 2010$ vagy $\log_{2012} 2011$?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



VIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2010. december 4.

12. évfolyam

1. Oldd meg az adott egyenletrendszert:

$$\begin{aligned}x^6 + y^6 &= 65, \\x^4 - x^2 y^2 + y^4 &= 13.\end{aligned}$$

2. Melyik a nagyobb, $\log_{2011} 2010$ vagy $\log_{2012} 2011$?

3. AB átmérőjű félkörbe beírtunk egy $ABCD$ konvex négyszöget (C és D egy félkörön vannak). Legyen P a CD oldal egy tetszőleges pontja, valamint Q a P merőleges vetülete az AB -re. Igazold, hogy:

$$|QA| \cdot |QB| - |PC| \cdot |PD| = |PQ|^2.$$

4. Az $a_1, a_2, a_3, \dots$ pozitív számok számtani (aritmetikai) sorozatot alkotnak. Igazold, hogy:

$$\frac{1}{a_1 a_n} + \frac{1}{a_2 a_{n-1}} + \dots + \frac{1}{a_n a_1} = \frac{2}{a_1 + a_n} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right).$$

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

A VIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI

8. évfolyam

1. A nyáron egy kis faluban volt az osztály kirándulni. Az egyetlen bolt árukészlete minden reggel ugyanaz volt. Mi voltunk az első vásárlók és a kiflik felét, a zsemlék negyedét, a tej egy ötödét elvittük, és ezért 1800 dinárt fizettünk. Másnap az előző napival azonos árukészletből a kifliknek és a zsemléknek is a harmadát, a tejnek negyedét vittük el és most 1500 dinárt fizettünk. Harmadnap megint másként rendeltek az osztálytársak, és most a kiflik hatodát, a zsemlék öt tizenketted részét, a tejnek három tized részét vittük el. Mennyit fizettünk a harmadik napon?

(A megoldásban jelöljük a kiflik, a zsemlék és a tej teljes napi árukészletének árát k , z és t betűkkel.)

Megoldás. Ha a kiflik, a zsemlék és a tej teljes napi árukészletének árát k , z és t betűkkel jelöljük, akkor

$$\frac{k}{2} + \frac{z}{3} + \frac{t}{4} = 900 \text{ és } \frac{k}{3} + \frac{z}{4} + \frac{t}{5} = 660.$$

Arra vagyunk kíváncsiak, hogy mennyi $\frac{k}{6} + \frac{z}{12} + \frac{t}{20}$ értéke.

Az első két feltételből nem tudjuk meghatározni k , z és t értékét.

Mégis milyen összefüggés lehet a három törtkifejezés között?

Némi próbálgatás után rájöhethetünk, hogy ha az első egyenletből kivonjuk az második egyenletet, akkor megkapjuk a keresett értéket. Valóban,

$$\frac{k}{2} - \frac{k}{3} = \frac{k}{6}, \quad \frac{z}{3} - \frac{z}{4} = \frac{z}{12}, \quad \frac{t}{4} - \frac{t}{5} = \frac{t}{20}.$$

Eszerint a harmadik napon $900 - 660 = 240$ dinárt fizettünk.

2. Egy dobozban 23 piros, 15 kék, 20 fehér és valahány zöld sapka van. Ezek csak a színükben különböznek. A dobozból csukott szemmel találomra vehetünk ki sapkákat. Adott az alábbi három igaz állítás:

(1) Ha kiveszünk 63 sapkát, biztosan van köztük fehér.

(2) Legalább 59 sapkát kell kivennünk ahhoz, hogy biztosan legyen köztük zöld.

(3) Legfeljebb 53 sapkát vehetünk ki úgy, hogy ne legyen köztük piros.

El lehet-e dönteni a fenti állításokból, hogy pontosan hány zöld sapka van a dobozban? Indokold!

Megoldás. Vizsgáljuk meg sorban, melyik állításból milyen következtetést vonhatunk le a zöld sapkák számáról.

(1) Legfeljebb 62 nem fehér sapka van, így zöldeből $62 - 23 - 15 = 24$ -nél nem lehet több. (Az állításból nem következik, hogy pontosan 24 zöld van, hiszen lehet, hogy már 60 kihúzott sapka között is van zöld.)

(2) Összesen $23 + 15 + 20 = 58$ nem zöld sapkánk van, így ez az állítás mindig igaz.

(3) A nem piros sapkák száma 53, azaz $53 - 15 - 20 = 18$ zöld sapka van a dobozban.

3. Add meg az $x^2y + x^2 = 180$ egyenlet pozitív egész megoldásait!

I.Megoldás. Használjuk fel az $x^2y + x^2 = x^2(y+1)$ azonosságot. Mivel $y+1$ egész, ezért x^2 a 180 osztója. Ki kell keresni a 180 osztói közül a négyzetszámokat. A $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ prímtényezős felbontásából a megfelelő osztók az 1, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $2^2 \cdot 3^2 = 36$. A megoldást adó (x, y) párok tehát: $(1, 179)$, $(2, 44)$, $(3, 19)$, $(6, 4)$.

II.Megoldás: x^2 és x^2y is pozitív egész, így kisebb 180-nál. x^2 nem nagyobb x^2y -nél, így legfeljebb $\frac{180}{2} = 90$. Soroljuk fel a 90-nél nem nagyobb négyzetszámokat, és számoljuk ki mindegyik esetben $\frac{180 - x^2}{x^2}$ értékét. Ha egészet kapunk hányadosként, akkor megoldást találtunk. Ha a hányados nem egész, akkor az x érték nem ad megoldást.

x	1	2	3	4	5	6	7	8
x^2	1	4	9	16	25	36	49	64
$y = \frac{180 - x^2}{x^2}$	179	44	19	$\frac{41}{4}$	$\frac{31}{5}$	4	$\frac{131}{49}$	$\frac{29}{2}$

A megoldások: $x=1$, $y=179$, $x=2$, $y=44$, $x=3$, $y=19$ és $x=6$, $y=4$.

4. Az ABC háromszögben $\alpha = \beta + 90^\circ$. Tükrözzük a háromszöget a C csúcsból induló magasságvonalra. Így kapjuk az $A'B'C'$ háromszöget. Bizonyítsd be, hogy a BCA' háromszög derékszögű!

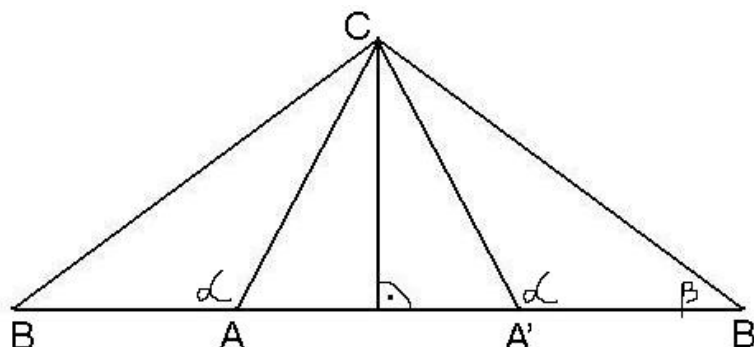
Megoldás. Az $\alpha > 90^\circ$, vagyis tompaszög a feltétel szerint. Ezért a C csúcsból induló magasság T talppontja az AB szakaszon kívül van.

A CT egyenesre való tükrözés miatt $\alpha = \angle CA'B'$, ez az $A'BCA$ külső szöge is, ezért $\alpha = \angle BCA' + \beta$,

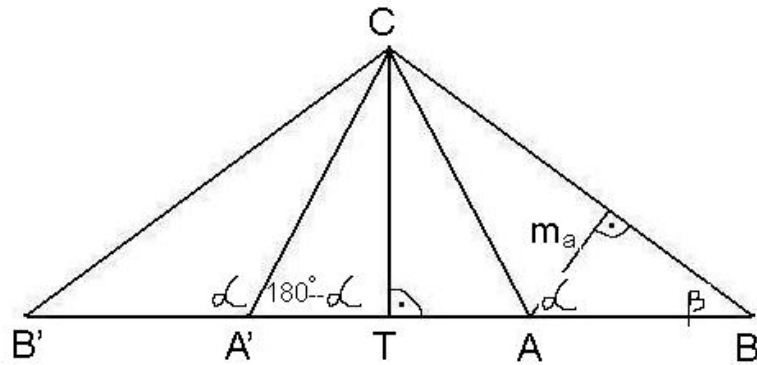
ami az $\alpha = 90^\circ + \beta$ feltétellel egybevetve a

$$\angle BCA' = 90^\circ$$

azonosságot adja.



II.Megoldás: Az állítás igazolására elég megmutatnunk, hogy $A'C \parallel m_a$.

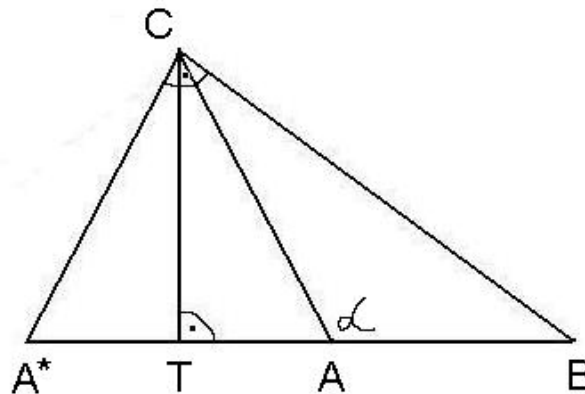


Az m_a az AB félegyenessel $90^\circ - \beta$ szöget zár be, míg a CA' ugyanezzel a félegyenessel

$$180^\circ - \alpha = 180^\circ - (\beta + 90^\circ) = 90^\circ - \beta$$

szöget. A két egyenes $A'C$ és m_a valóban párhuzamosak, és ezt kellett igazolni.

III.Megoldás:



Emeljünk a C pontban a BC -re merőleget. Ez a merőleges messe az AB egyenest az A^* pontban. A^* különbözik az A ponttól, mivel $\angle BCA < 90^\circ$. Ha belátjuk, hogy

$$\angle CA^*A = \angle CAA^*,$$

akkor beláttuk, hogy az A -nak a CT -re vonatkozó tükörképe az A^* , és ezzel bebizonyítottuk a feladatbeli állítást. Az $A^*CB\Delta$ derékszögű, tehát

$$\angle CAA^* = 90^\circ - \beta.$$

A feltételek miatt

$$\angle CAA^* = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - (90^\circ + \beta) = 90^\circ - \beta,$$

és éppen ezeket kellett belátnunk.

9. évfolyam

1. Egy matematika teszt megírásában egy középiskola 100 tanulója vett részt, és az átlagpontoszámuk 100 pont volt. Az alsóévesek száma 50%-kal több, mint a felsőéveseké, a felsőévesek átlaga pedig 50%-kal több, mint az alsóéveseké. Mennyi a felsőévesek átlagpontoszáma?

Megoldás. Ha a felsőéves tanulók létszámát $2t$ -vel jelöljük, akkor az alsóévesek száma $3t$. Mivel a kettő összege, az $5t$ éppen 100, ezért $t = 20$, amiből következik, hogy 60 alsóéves és 40 felsőéves vett részt a tesztelésen.

Az alsóévesek átlagpontoszámát jelöljük $2a$ -val. Ekkor a felsőévesek átlagpontoszáma $3a$. Az egész iskola átlagpontoszáma: $\frac{(60 \cdot 2a + 40 \cdot 3a)}{100} = \frac{240a}{100} = 2,4a$. Mivel ez a

szám 100-zal egyenlő, így $a = \frac{100}{2,4} = \frac{125}{3}$. A felsőévesek pontszámának átlaga ennek a háromszorosa, azaz 125.

2. Melyik az a legnagyobb természetes szám, amely kisebb a számjegyei négyzetösszegénél?

Megoldás. A keresett számot jelölje $N = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$. Ekkor

$$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0 < a_n^2 + a_{n-1}^2 + \dots + a_1^2 + a_0^2.$$

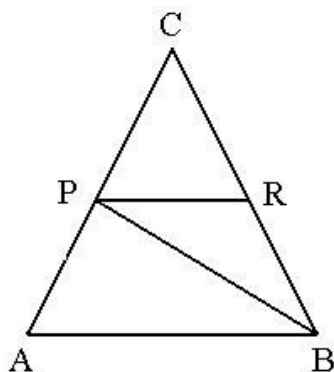
Átrendezés után kapjuk az

$$(*) \quad a_n(10^n - a_n) + a_{n-1}(10^{n-1} - a_{n-1}) + \dots + a_1(10 - a_1) + a_0(1 - a_0) < 0$$

egyenlőtlenséget, amelynek csak az utolsó tagja lehet negatív. Az utolsó tag minimális értéke $9 \cdot (1 - 9) = -72$. Ha $k \geq 2$ és $a_k \neq 0$, akkor $a_k(10^k - a_k) > 1 \cdot (10^k - 9) > 90$.

Ebben az esetben a (*) egyenlőtlenség baloldala nem lehet negatív, így az $a_k = 0$, vagyis a szám legfeljebb kétjegyű. A kétjegyű számok közül a 99-re teljesül a feladat feltétele, így ez a keresett szám.

3. Az ABC egyenlőszárú háromszögben ($|AC| = |BC|$) a B csúcsnál lévő belső szög szögfelezője a szemközti oldalt egy P pontban metszi. Bizonyítsd be, hogy $|BP| < 2|AP|$.



Megoldás. Az R pont illeszkedjen a BC oldalra úgy, hogy a PR szakasz párhuzamos legyen az alappal. Ekkor az $ABRP$ négyszög egyenlőszárú trapéz, mert van párhuzamos oldalpárja, és az alapon fekvő szögei egyenlők. Továbbá

$\angle ABP = \angle BPR$, mert váltószögek,

$\angle ABP = \angle RBP$, mert BP szögfelező, tehát

$$\angle BPR = \angle RBP.$$

$|PR| = |RB|$, mert a BPR háromszög azonos nagyságú szögeivel szemben fekszenek.

A háromszög-egyenlőtlenségből kiindulva a fenti megfigyeléseink alapján $|BP| < |PR| + |RB| = 2|RB| = 2|AP|$.

4. Egy dobozban 23 piros, 15 kék, 20 fehér és valahány zöld sapka van. Ezek csak a színükben különböznek. A dobozból csukott szemmel találomra vehetünk ki sapkákat. A következő négy állításból pontosan három igaz.

- (1) Ha kiveszünk 63 sapkát, biztosan van köztük fehér.**
- (2) Legalább 59 sapkát kell kivennünk ahhoz, hogy biztosan legyen köztük zöld.**
- (3) Ha kiveszünk 46 sapkát, lehet, hogy nincs köztük sem piros, sem kék.**
- (4) Legfeljebb 53 sapkát vehetünk ki úgy, hogy ne legyen köztük piros.**

Hány zöld sapka van a dobozban?

Megoldás. Vizsgáljuk meg sorban, melyik állításból milyen következtetést vonhatunk le a zöld sapkák számáról.

(1) Legfeljebb 62 nem fehér sapka van, így zöldből $62 - 23 - 15 = 24$ -nél nem lehet több. (Az állításból nem következik, hogy pontosan 24 zöld van, hiszen lehet, hogy már 60 kihúzott sapka között is van zöld.)

(2) Összesen $23 + 15 + 20 = 58$ nem zöld sapkánk van, így ez az állítás mindig igaz.

(3) A fehér és a zöld sapkák száma legalább 46, tehát zöldből legalább 26 van.

(4) A nem piros sapkák száma 53, azaz $53 - 15 - 20 = 18$ zöld sapka van a dobozban.

Az (1) és a (3) egymásnak ellentmondó állítások, tehát közülük az egyik hamis. Emiatt a (4) igaz kell legyen, ezt összevetve az előző feltételekkel azt kapjuk, hogy a (3) a hamis állítás, és 18 zöld sapka van a dobozban.

10. évfolyam

1. Ha a és b valós számok és $ab \in [-1,1]$, akkor igazold, hogy

$$(a+b+2)^2 \geq 4(a+b)(ab+1).$$

Megoldás. Az egyenlőtlenség ekvivalens az

$$(a+b)^2 + 4(a+b) + 4 \geq 4(a+b)ab + 4(a+b)$$

egyenlőtlenséggel. Mivel ebből

$$(a+b)^2 - 4(a+b)ab + 4 \geq 0,$$

majd hozzáadva és kivonva $4a^2b^2$ -et adódik, hogy

$$(a+b)^2 - 4(a+b)ab + 4a^2b^2 + 4(1-a^2b^2) \geq 0.$$

Ebből adódik, hogy

$$(a+b-2ab)^2 + 4(1-a^2b^2) \geq 0,$$

mert mindkét tag nemnegatív.

2. Egy szöcske ugrál a kör kerületén az óramutató járásával megegyező irányba. Az első ugrásnak egy 1° -os középponti szög felel meg, a második ugrásnak egy 2° -os középponti szög felel meg, és általában a k -adik ugrásának egy k° -os középponti szög felel meg. Hányadik ugrásával kerül először olyan pontra, ahol már járt?

Megoldás. A k -adik ugrás után a szöcske helyzetét jellemző középponti szög mértéke

$$1+2+3+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2},$$

így ha $m > k$, a k -adik és m -edik lépés után pontosan akkor kerül a szöcske ugyanabba a pontba ha

$$\frac{m(m+1)}{2} - \frac{k(k+1)}{2} = 360n$$

ahol $n \in \mathbb{N}$. Innen

$$m^2 - k^2 + m - k = 720n,$$

illetve

$$(m-k)(m+k+1) = 720n = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot n.$$

Mivel az $m-k$ és $m+k+1$ paritása nem azonos, az előbbi egyenlet csak akkor teljesülhet, ha

$$16|(m-k) \text{ vagy } 16|(m+k+1).$$

Mivel $m > k$, és a legkisebb megoldást keressük így feltételezzük hogy $n=1$, ezért az alábbi egyenletrendszereket vizsgáljuk:

$$\begin{array}{ll} m-k=15 & m-k=16 \\ \underline{m+k+1=48} & \text{és} \quad \underline{m+k+1=45}. \end{array}$$

Az első esetben $m=30$ és $k=14$, míg a másodikban $m=31$ és $k=16$. Látható, hogy $m=30$ a kisebb megoldás, tehát a szöcske 30 ugrás után kerül először olyan pontra, ahol már korábban is járt.

3. Az ABC háromszög oldalain adottak az $M \in BC$, $N \in AC$ és $P \in AB$ pontok úgy, hogy AM , BN és CP egyenesek egy pontban Q -ban metszik egymást. Határozd meg a háromszög A és B szögeinek mértékét, ha $BAM\angle = 20^\circ$, $ABN\angle = 30^\circ$, $BCP\angle = 20^\circ$ és $ACP\angle = 30^\circ$.

Megoldás. $PBN\angle = PCN\angle$, ezért a $PBCN$ húrnégyszög, amiből következik, hogy $PNB\angle = PCB\angle = 20^\circ$. Ennek alapján $PNQ\angle = PAQ\angle$, ezért a $PANQ$ húrnégyszög. $APQ\angle + ANQ\angle = 180^\circ$, ugyanakkor $APQ\angle = ANQ\angle$, mert az ABN és APC háromszögek hasonlóak. Tehát a BN , CP és AM a háromszög magasságvonalai. Ebből adódik, hogy $MAC\angle = 90^\circ - ACM\angle = 40^\circ$, továbbá hogy $BAC\angle = 60^\circ$ és az $ABC\angle = 180^\circ - (50^\circ + 60^\circ) = 70^\circ$.

4. Egy dobozban 23 piros, 15 kék, 20 fehér és valahány zöld sapka van. Ezek csak a színükben különböznek. A dobozból csukott szemmel találomra vehetünk ki sapkákat. A következő négy állításból pontosan három igaz.

- (1) Ha kiveszünk 63 sapkát, biztosan van köztük fehér.
 - (2) Legalább 59 sapkát kell kivennünk ahhoz, hogy biztosan legyen köztük zöld.
 - (3) Ha kiveszünk 46 sapkát, lehet, hogy nincs köztük sem piros, sem kék.
 - (4) Legfeljebb 53 sapkát vehetünk ki úgy, hogy ne legyen köztük piros.
- Hány zöld sapka van a dobozban?**

Megoldás. Vizsgáljuk meg sorban, melyik állításból milyen következtetést vonhatunk le a zöld sapkák számáról.

- (1) Legfeljebb 62 nem fehér sapka van, így zöldből $62 - 23 - 15 = 24$ -nél nem lehet több. (Az állításból nem következik, hogy pontosan 24 zöld van, hiszen lehet, hogy már 60 kihúzott sapka között is van zöld.)
 - (2) Összesen $23 + 15 + 20 = 58$ nem zöld sapkánk van, így ez az állítás mindig igaz.
 - (3) A fehér és a zöld sapkák száma legalább 46, tehát zöldből legalább 26 van.
 - (4) A nem piros sapkák száma 53, azaz $53 - 15 - 20 = 18$ zöld sapka van a dobozban.
- Az (1) és a (3) egymásnak ellentmondó állítások, tehát közülük az egyik hamis. Emiatt a (4) igaz kell legyen, ezt összevetve az előző feltételekkel azt kapjuk, hogy a (3) a hamis állítás, és 18 zöld sapka van a dobozban.

11. évfolyam

1. Egy szöcske ugrál a kör területén az óramutató járásával megegyező irányba. Az első ugrásnak egy 1° -os középponti szög felel meg, a második ugrásnak egy 2° -os középponti szög felel meg, és általában a k -adik ugrásának egy k° -os középponti szög felel meg. Hányadik ugrásával kerül először olyan pontra, ahol már járt?

Megoldás. A k -adik ugrás után a szöcske helyzetét jellemző középponti szög mértéke

$$1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2},$$

így ha $m > k$, a k -adik és m -edik lépés után pontosan akkor kerül a szöcske ugyanabba a pontba ha

$$\frac{m(m+1)}{2} - \frac{k(k+1)}{2} = 360n$$

ahol $n \in \mathbb{N}$. Innen

$$m^2 - k^2 + m - k = 720n,$$

illetve

$$(m-k)(m+k+1) = 720n = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot n.$$

Mivel az $m-k$ és $m+k+1$ paritása nem azonos, az előbbi egyenlet csak akkor teljesülhet, ha

$$16 \mid (m-k) \text{ vagy } 16 \mid (m+k+1).$$

Mivel $m > k$, és a legkisebb megoldást keressük így feltételezzük hogy $n=1$, ezért az alábbi egyenletrendszereket vizsgáljuk:

$$\begin{array}{ll} m-k=15 & m-k=16 \\ \underline{m+k+1=48} & \text{és} \quad \underline{m+k+1=45}. \end{array}$$

Az első esetben $m=30$ és $k=14$, míg a másodikban $m=31$ és $k=16$. Látható, hogy $m=30$ a kisebb megoldás, tehát a szöcske 30 ugrás után kerül először olyan pontba, ahol már korábban is járt.

2. Igazold, hogy nem léteznek olyan m és n pozitív egész számok, amelyekre $m^2 + 4n$ és $n^2 + 4m$ is négyzetszám!

Megoldás. Feltételezzük, hogy léteznek ilyen m és n számok, amelyekre $m^2 + 4n$ és $n^2 + 4m$ is négyzetszámok. A két kifejezésben n és m „szimmetrikusan” helyezkednek el, ezért az általánosságra való kihatás nélkül feltételezhetjük, hogy például $m \leq n$. Ekkor

$$n^2 < n^2 + 4m \leq n^2 + 4n < n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2.$$

Ha

$$n^2 + 4m < (n+2)^2$$

és $n^2 + 4m$ négyzetszám, akkor csakis $n^2 + 4m = (n+1)^2$ teljesülhet. Ebből viszont $4m = 2n+1$ ami ellentmondás, mivel $4m$ páros $2n+1$ pedig páratlan szám. Így a feltételezésünk helytelen, vagyis nem léteznek ilyen m és n számok.

3. Bizonyítsd be, hogy:

$$\frac{1}{\cos x} + 2 \frac{\cos x}{\cos 2x} + 4 \frac{\cos 3x}{\cos 4x} + 8 \frac{\cos 7x}{\cos 8x} = 16 \frac{\sin 15x}{\sin 16x}.$$

Megoldás. Mivel

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{2 \sin x}{2 \sin x \cos x} = \frac{2 \sin x}{\sin 2x},$$

így

$$\frac{2 \sin x}{\sin 2x} + \frac{2 \cos x}{\cos 2x} = \frac{2 \cdot 2 (\sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x)}{2 \sin 2x \cos 2x} = \frac{4 \sin 3x}{\sin 4x},$$

$$\frac{4 \sin 3x}{\sin 4x} + \frac{4 \cos 3x}{\cos 4x} = \frac{2 \cdot 4 (\sin 3x \cos 4x + \cos 3x \sin 4x)}{2 \sin 4x \cos 4x} = \frac{8 \sin 7x}{\sin 8x},$$

$$\frac{8 \sin 7x}{\sin 8x} + \frac{8 \cos 7x}{\cos 8x} = \frac{2 \cdot 8 (\sin 7x \cos 8x + \cos 7x \sin 8x)}{2 \sin 8x \cos 8x} = \frac{16 \sin 15x}{\sin 16x}.$$

4. Melyik a nagyobb, $\log_{2011} 2010$ vagy $\log_{2012} 2011$?

Megoldás. Az a kérdés, hogy milyen reláció a ρ , ha $\log_{2011} 2010 \rho \log_{2012} 2011$?

Ha $\log_{2011} 2010 \rho \log_{2012} 2011$ relációt kell meghatározni, akkor valójában a

$$\frac{\log 2010}{\log 2011} \rho \frac{\log 2011}{\log 2012}$$

reláció a kérdés. Mivel ezek a logaritmus értékek mind pozitívak, ezért az előbbi reláció ekvivalens a $\log 2010 \cdot \log 2012 \rho \log^2 2011$ relációval. A számtani és a mértani közepek közötti ismert $G \leq A$ egyenlőtlenség alapján

$$\sqrt{\log 2010 \cdot \log 2012} \leq \frac{\log 2010 + \log 2012}{2},$$

illetve ezek négyzeteire érvényes, hogy:

$$\begin{aligned} \log 2010 \cdot \log 2012 &\leq \left(\frac{\log 2010 + \log 2012}{2} \right)^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot \log (2010 \cdot 2012) \right)^2 = \\ &= \left(\frac{1}{2} \cdot \log (2011-1)(2010+1) \right)^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot \log (2011^2 - 1) \right)^2 = \left(\log \sqrt{2011^2 - 1} \right)^2 < \\ &< \left(\log \sqrt{2011^2} \right)^2 = \log^2 2011. \end{aligned}$$

A keresett ρ reláció tehát a „kisebb” reláció, vagyis $\log_{2011} 2010 < \log_{2012} 2011$.

12. évfolyam

1. Oldd meg az adott egyenletrendszert:

$$\begin{aligned}x^6 + y^6 &= 65, \\ x^4 - x^2 y^2 + y^4 &= 13.\end{aligned}$$

Megoldás. Vezessük be az $x^2 = u$, $y^2 = v$ helyettesítést. Ekkor a második egyenlet alakja $u^2 - uv + v^2 = 13$, az első pedig $u^3 + v^3 = 65$. A köbök összegének felbontása után:

$$(u + v)(u^2 - uv + v^2) = 65,$$

illetve

$$13(u + v) = 65 \Rightarrow u + v = 5 \Rightarrow v = 5 - u.$$

Ekkor az első egyenletbe helyettesítve

$$u^2 - u(5 - u) + (5 - u)^2 = 13,$$

rendezés után pedig

$$3u^2 - 15u + 25 = 13,$$

ahonnan az

$$u^2 - 5u + 4 = 0$$

másodfokú egyenletet kapjuk. Ennek megoldásai

$$u_1 = 1 = x^2 \text{ és } u_2 = 4 = x^2 \text{ illetve } v_1 = 4 = y^2 \text{ és } v_2 = 1 = y^2.$$

Ezekből kapjuk az eredeti egyenletünk megoldásait:

$$M = \{(1, 2), (1, -2), (-1, 2), (-1, -2), (2, 1), (2, -1), (-2, 1), (-2, -1)\}.$$

2. Melyik a nagyobb, $\log_{2011} 2010$ vagy $\log_{2012} 2011$?

Megoldás. Az a kérdés, hogy milyen reláció a ρ , ha $\log_{2011} 2010 \rho \log_{2012} 2011$?

Ha $\log_{2011} 2010 \rho \log_{2012} 2011$ relációt kell meghatározni, akkor valójában a

$$\frac{\log 2010}{\log 2011} \rho \frac{\log 2011}{\log 2012}$$

reláció a kérdés. Mivel ezek a logaritmus értékek mind pozitívak, ezért az előbbi reláció ekvivalens a $\log 2010 \cdot \log 2012 \rho \log^2 2011$ relációval. A számtani és a mértani közepek közötti ismert $G \leq A$ egyenlőtlenség alapján

$$\sqrt{\log 2010 \cdot \log 2012} \leq \frac{\log 2010 + \log 2012}{2},$$

illetve ezek négyzeteire érvényes, hogy:

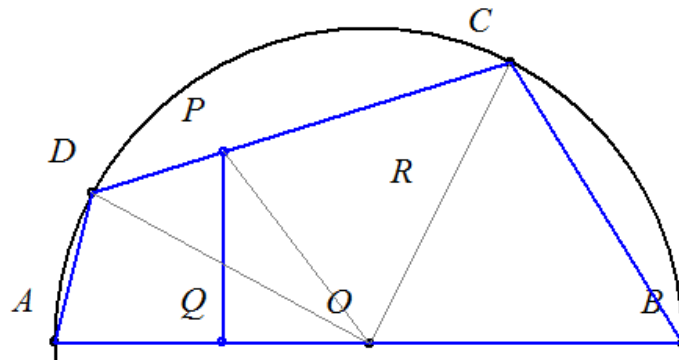
$$\begin{aligned}\log 2010 \cdot \log 2012 &\leq \left(\frac{\log 2010 + \log 2012}{2} \right)^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot \log(2010 \cdot 2012) \right)^2 = \\ &= \left(\frac{1}{2} \cdot \log(2011 - 1)(20100 + 1) \right)^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot \log(2011^2 - 1) \right)^2 = \left(\log \sqrt{2011^2 - 1} \right)^2 < \\ &< \left(\log \sqrt{2011^2} \right)^2 = \log^2 2011.\end{aligned}$$

A keresett ρ reláció tehát a „kisebb” reláció, vagyis $\log_{2011} 2010 < \log_{2012} 2011$.

3. AB átmérőjű félkörbe beírtunk egy $ABCD$ konvex négyszöget (C és D egy félkörön vannak). Legyen P a CD oldal egy tetszőleges pontja, valamint Q a P merőleges vetülete az AB -re. Igazold, hogy:

$$|QA| \cdot |QB| - |PC| \cdot |PD| = |PQ|^2.$$

I.Megoldás. Alkalmazzuk Stewart képletét az ODC háromszögre:



$$|DO|^2 \cdot |PC| + |OC|^2 \cdot |DP| = |OP|^2 \cdot |DC| + |DP| \cdot |PC| \cdot |DC|.$$

Mivel

$$|OD| = |OC| = R,$$

ezért

$$R^2 \cdot |PC| + R^2 \cdot |DP| = |OP|^2 \cdot |DC| + |DP| \cdot |PC| \cdot |DC|,$$

vagyis

$$R^2 (|PC| + |DP|) = |OP|^2 \cdot |DC| + |DP| \cdot |PC| \cdot |DC|.$$

Eloszthatjuk DC -vel:

$$R^2 = |OP|^2 + |DP| \cdot |PC|.$$

Tehát

$$R^2 - |OP|^2 = |DP| \cdot |PC|.$$

Másrészt a pont hatványa a körre

$$|AQ| \cdot |QB| = R^2 - |OQ|^2 = (R - |OQ|)(R + |OQ|).$$

Tehát

$$|QA| \cdot |QB| - |PC| \cdot |PD| = R^2 - |OQ|^2 - R^2 + |OP|^2 = |OP|^2 - |OQ|^2 = |PQ|^2.$$

II.Megoldás:

A P pont hatványa a körre

$$R^2 - |OP|^2 = |DP| \cdot |PC|,$$

a Q pont hatványa a körre

$$|AQ| \cdot |QB| = R^2 - |OQ|^2 = (R - |OQ|)(R + |OQ|).$$

Tehát

$$|QA| \cdot |QB| - |PC| \cdot |PD| = R^2 - |OQ|^2 - R^2 + |OP|^2 = |OP|^2 - |OQ|^2 = |PQ|^2 ..$$

4. Az $a_1, a_2, a_3, \dots$ pozitív számok számtani (aritmetikai) sorozatot alkotnak. Igazold, hogy:

$$\frac{1}{a_1 a_n} + \frac{1}{a_2 a_{n-1}} + \dots + \frac{1}{a_n a_1} = \frac{2}{a_1 + a_n} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right).$$

Megoldás. Mivel

$$\frac{1}{a_1 a_n} = \frac{a_1 + a_n}{a_1 a_n (a_1 + a_n)} = \frac{1}{a_1 + a_n} \left(\frac{a_1 + a_n}{a_1 a_n} \right) = \frac{1}{a_1 + a_n} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_n} \right),$$

így hasonlóan

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_2 a_{n-1}} &= \frac{a_2 + a_{n-1}}{a_2 a_{n-1} (a_2 + a_{n-1})} = \frac{1}{a_2 + a_{n-1}} \left(\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_{n-1}} \right), \\ \frac{1}{a_3 a_{n-2}} &= \frac{a_3 + a_{n-2}}{a_3 a_{n-2} (a_3 + a_{n-2})} = \frac{1}{a_3 + a_{n-2}} \left(\frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_{n-2}} \right), \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \frac{1}{a_n a_1} &= \frac{a_n + a_1}{a_n a_1 (a_n + a_1)} = \frac{1}{a_1 + a_n} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_n} \right). \end{aligned}$$

Mivel

$$a_1 + a_n = 2a_1 + (n-1)d = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \dots = a_n + a_1,$$

így a fenti egyenletek összeadásával kapjuk a keresett azonosságot:

$$\frac{1}{a_1 a_n} + \frac{1}{a_2 a_{n-1}} + \dots + \frac{1}{a_n a_1} = \frac{2}{a_1 + a_n} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right).$$

A VIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY DÍJAZOTTJAI

8. évfolyam

1. Szilágyi Krisztina, Jovanović Zmaj Általános Iskola, Újvidék, **I. díj**
2. Kovacsics Flórián, Petar Kočić Általános Iskola, Temerin, **I. díj**
3. Kanalas Dávid, Fejős Klára Általános Iskola, Kikinda, **I. díj**
4. Kovacsics Viola, Petar Kočić Általános Iskola, Temerin, **II. díj**
5. Vrábel Máté Dávid, Jovan Popović Általános Iskola, Csóka, **III. díj**
6. Rozsnyik Szabolcs, Jovan Jovanović Zmaj Ált. Iskola, Magyarkanizsa, **dicséret**
7. Szakály László, Stevan Sremac Általános Iskola – Emlékiskola, Zenta, **dicséret**
8. Törteli Anna, Stevan Sremac Általános Iskola – Emlékiskola, Zenta, **dicséret**
9. Olajos Annabella, Sonja Marinković Általános Iskola, Nagybecskerek, **dicséret**
10. Szabó Róbert, Szervo Mihály Általános Iskola, Muzslya, **dicséret**
11. Vajdovics Viktória, Jovan Jovanović Zmaj Ált. Iskola, Törökkanizsa, **dicséret**

9. évfolyam

1. Bíró Dominik, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
2. Horti Krisztina, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
3. Csipak Levente, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
4. Tokity Rudolf, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
5. Mátéffy Kristóf, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
6. Nagy Dávid, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
7. Major Kristóf, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **dicséret**
8. Nagy Ábel Bence, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **dicséret**
9. Francia Krisztina, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **dicséret**

10. évfolyam

1. Nagy Henrietta, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
2. Pletikoszity Johanna, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **I. díj**
3. Bakos Evelin, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **II. díj**
4. Kiskároly Tímea, Dositej Obradović Gimnázium, Topolya, **III. díj**
5. Balzam Henrietta, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **III. díj**
6. Börcsök Beatrix, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **dicséret**
7. Horváth Enikő, Bosa Milićević Közgazdasági Középiskola, Szabadka, **dicséret**
8. Ribár Miklós, Zentai Gimnázium, Zenta, **dicséret**

11. évfolyam

1. Nagygyörgy Kristóf, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **I. díj**
2. Körmöczi Andor, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
3. Simonyi Máté, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
4. Pusin Igor, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **III. díj**
5. Ripcó Ákos, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **dicséret**
6. Hajnal Andor, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **dicséret**
7. Piri Annamária, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**

12. évfolyam

1. Kovacsics Tamás, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
2. Bálint Árpád, Műszaki Középiskola, Ada, **II. díj**
3. Vrbaski Iván, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
4. Víg Anna, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **dicséret**
5. Berec Alexandra, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**



Díjkiosztó ünnepség.

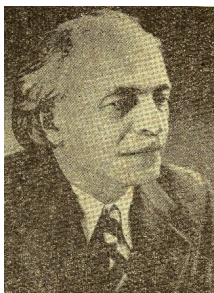
A IX. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Előadó: dr. Makay Géza

Előadás címe: Sudoku



Munkában a versenybizottság.



IX. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

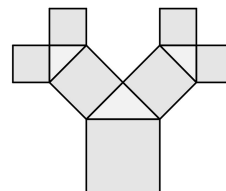
Zenta, 2011. december 10.

7. évfolyam

1. Hányféleképpen lehet kiolvasni Fekete Mihály nevét az ábrából, ha a bal felső sarokban lévő F betűtől indulunk, és csak jobbra vagy lefelé haladhatunk?

```
F E K E
E K E T
K E T E M I H Á
      I H Á L
      H Á L Y
```

2. Az egyenlő szárú Pitagorasz-fának első évben kinő a törzse, ami egy négyzet. A második évben ennek a tetejére egy egyenlő szárú derékszögű háromszög nő úgy, hogy az átfogója a négyzet felső oldala, valamint a háromszög két befogójából kiágazik az első két ág, amelyek szintén négyzetek. Ezután minden évben, minden új négyzetág átellenes oldalára egy egyenlő szárú derékszögű háromszög nő, azokra pedig újabb négyzetágak. Ha a fa törzse az ábrán 8 méter széles, az ötödik év végén milyen magas, illetve milyen széles lesz az egész fa?

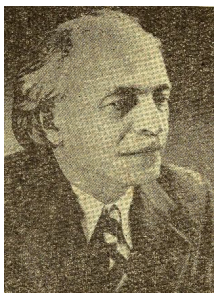


3. Hány olyan ötjegyű természetes szám létezik, amely osztható 12-vel és számjegyeinek összege 3?

4. Karcsinak 20 papagája van, melyek között van feketesapkás, jákó, nimfa és Sándor. 17 papagáj nem jákó, 5 Sándor és 12 nem feketesapkás. Hány nimfapapagája van Karcsinak?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



IX. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2011. december 10.

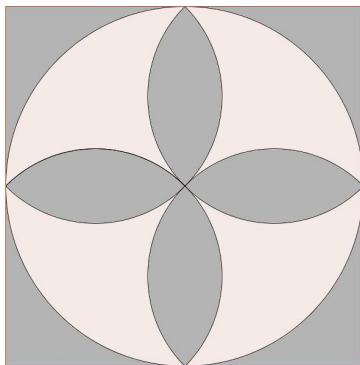
8. évfolyam

11. A bíróságon András, Béla és Csaba ugyanazokra a kérdésekre válaszoltak, s mindegyikre igennel, vagy nemmel. Azokra a kérdésekre, amelyekre Béla és Csaba igennel válaszolt, András is igent mondott. Azokra a kérdésekre, amelyekre András igent mondott, azokra Béla is igennel válaszolt, s amelyekre Béla igent mondott, azokra igent mondott András és Csaba közül legalább az egyik. Bizonyítsd be, hogy András és Béla minden kérdésre ugyanazt a választ adta!

2. Egy 13 gyöngyből álló gyöngysor középső szeme a legnagyobb és a legértékesebb. Az egyik vége felé a szemek értéke szemről-szemre 200 dinárral, a másik vége felé pedig ugyanígy 300 dinárral csökken. Mennyit ér a középső szem, ha az egész gyöngysor ára 17-szer annyi, mint a középső szemtől számított ötödik szem ára a kevésbé értékes oldalon?

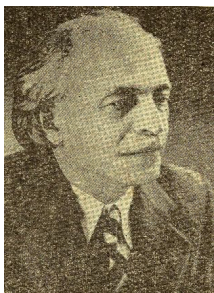
3. Van-e két olyan négyzetszám, amelyeknek a különbsége 2012? Melyek ezek? Hány ilyen pár van?

4. Az ábrán egy egységnyi oldalú négyzetet, egy ebbe írt kört, és négy, a négyzet szomszédos oldalainak felezőpontját összekötő szakasz fölé írt félkört szerkesztettük meg. Mutasd meg, hogy az árnyékolt részek területének összege egyenlő (a négyzeten belüli) üresen hagyott részek területösszegével!



A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



IX. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

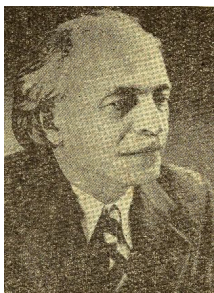
Zenta, 2011. december 10.

9. évfolyam

1. Van-e két olyan négyzetszám, amelyeknek a különbsége 2012? Melyek ezek? Hány ilyen pár van?
2. Jelöljük P -vel az $ABCD$ téglalap AB oldalának A -hoz közelebb eső harmadoló pontját. Tudjuk, hogy a PD szakasz az AC átlóval derékszöget zár be. Határozd meg a téglalap oldalainak arányát!
3. Egy röplabda bajnokságban öt csapat vesz részt. Mindegyik csapat megmérkőzik mindegyik csapattal. Az első csapat x_1 -szer nyert és y_1 -szer veszített, a második csapat x_2 -ször nyert és y_2 -ször veszített,..., az ötödik csapat x_5 -ször nyert és y_5 -ször veszített. (A röplabdában nincs döntetlen.) Bizonyítsd be, hogy $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_5^2 = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_5^2$.
4. Egy tíztagú társaságban mindenkinek van legalább hét ismerőse. (Az ismeretségek kölcsönösek.) Igaz-e, hogy a társaságból bármely három személynek van közös ismerőse?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



IX. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2011. december 10.

10. évfolyam

1. Egy röplabda bajnokságban öt csapat vesz részt. Mindegyik csapat megmérkőzik mindegyik csapattal. Az első csapat x_1 -szer nyert és y_1 -szer veszített, a második csapat x_2 -ször nyert és y_2 -ször veszített,..., az ötödik csapat x_5 -ször nyert és y_5 -ször veszített. (A röplabdában nincs döntetlen.) Bizonyítsd be, hogy $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_5^2 = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_5^2$.

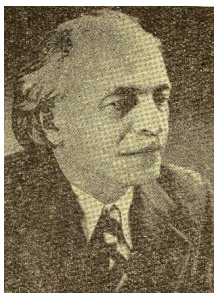
2. Mutasd meg, hogy a $2011^{2013} + 2013^{2011}$ összeg osztható 4-gyel!

3. Az $|AB|=1$ átmérőjű félkörbe olyan $ABCD$ trapézt szerkesztettünk, amely érintőnégyyszög is. Mekkora a trapéz két szára?

4. Számítsd ki mennyi $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2011} + \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{2011}$.

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



IX. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2011. december 10.

11. évfolyam

1. Az $|AB|=1$ átmérőjű félkörbe olyan $ABCD$ trapézt szerkesztettünk, amely érintőnégyyszög is. Mekkora a trapéz két szára?

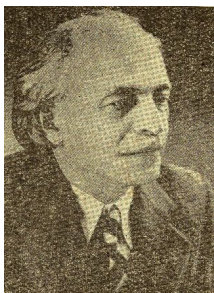
2. Oldd meg a $3^{\cos 2x} \cdot (4 \cdot 3^{\sin^2 x} - 9) = 1$ egyenletet!

3. Számítsd ki mennyi $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2011} + \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{2011}$.

4. Egy henger alakú edény alapátmérője 4 dm , mélysége 3 dm , színültig telve van vízzel. Ha megbillentjük az edényt 30° -kal a vízszintes helyzethez viszonyítva, mennyi víz marad benne?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



IX. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2011. december 10.

12. évfolyam

1. Bizonyítsd be, hogy a derékszögű háromszög beírt körének átmérője mértani közepe az átfogó és az egyik befogó különbségének, valamint az átfogó és a másik befogó különbsége kétszeresének!

2. Oldd meg a $\operatorname{tg} x \cdot (4 \cdot 3^{\cos^2 x} - 9 \cdot 3^{\cos 2x} - 1) = 0$ egyenletet!

3. Létezik-e olyan $\{a_n\}$ mértani sorozat, amelyben $\frac{1}{3}(a_1 + a_3 + a_4) = \frac{1}{2}(a_2 + a_4)$?

Indokold meg választ!

4. A szabályos négyoldalú gúla oldaléleinek hossza 1, négyzet alakú alapjának éle pedig x . Határozd meg a gúla $V(x)$ térfogatát az x függvényében, majd számítsd ki a $W(x) = 18 \cdot V(x)^2$ függvény lehető legnagyobb értékét!

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

A IX. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI

7. évfolyam

1. Hányféleképpen lehet kiolvasni Fekete Mihály nevét az ábrából, ha a bal felső sarokban lévő F betűtől indulunk, és csak jobbra vagy lefelé haladhatunk?

```

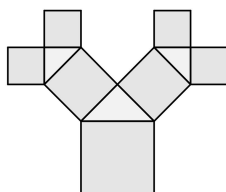
F E K E
E K E T
K E T E M I H Á
      I H Á L
      H Á L Y
    
```

Megoldás: Az eredményhez úgy tudunk legegyszerűbben eljutni, ha megvizsgáljuk, hogy egy-egy mezőre hányféleképpen érkezhetünk. Ha tudjuk, hogy hány út vezet egyik és másik L betűig, akkor azok összege megadja, hányféle úton juthatunk az Y-ig. A bal felső saroktól kezdve beírjuk a betűk helyére, hogy hány út vezet oda, majd minden mezőbe beírjuk a fölötte és balról mellette elhelyezkedő számok összegét. Megoldható egy részből, de két részre is oszthatjuk az ábrát, ekkor a végeredmény a két részeredmény szorzata lesz.

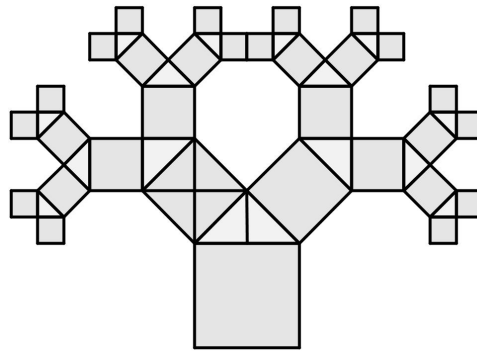
1	1	1	1					1	1	1	1				
1	2	3	4					1	2	3	4				
1	3	6	10	10	10	10	10	1	3	6	10	1	1	1	1
				10	20	30	40					1	2	3	4
				10	30	60	100					1	3	6	10

Fekete Mihály nevét 100-féleképpen olvashatjuk ki.

2. Az egyenlő szárú Pitagorasz-fának első évben kinő a törzse, ami egy négyzet. A második évben ennek a tetejére egy egyenlő szárú derékszögű háromszög nő úgy, hogy az átfogója a négyzet felső oldala, valamint a háromszög két befogójából kiágazik az első két ág, amelyek szintén négyzetek. Ezután minden évben, minden új négyzetág átellenes oldalára egy egyenlő szárú derékszögű háromszög nő, azokra pedig újabb négyzetágak. Ha a fa törzse az ábrán 8 méter széles, az ötödik év végén milyen magas, illetve milyen széles lesz az egész fa?



Megoldás:



A négyzeteket az átlók behúzásával a rájuk kerülő egyenlő szárú derékszögű háromszögekkel egybevágó háromszögekre bonthatjuk. Így a fa magassága:

$8 + 4 + 4 + 4 + 2 + 2 + 2 = 26 \text{ m}$ magas lesz, valamint $2 \cdot (4 + 4 + 4 + 4 + 2) = 36 \text{ m}$ széles.

3. Hány olyan ötjegyű természetes szám létezik, amely osztható 12-vel és számjegyeinek összege 3?

Megoldás: Ha a számjegyek összege 3, akkor a szám osztható 3-mal. Oszthatónak kell lennie 4-gyel is, ehhez meg kell vizsgálnunk az utolsó két számjegyet. Ha az utolsó két számjegy 00, akkor az első három számjegy összege 3, ezek pedig: 30000, 21000, 20100, 12000, 10200, 11100. Ha az utolsó két számjegy 20, egy lehetőségünk van: 10020. Minden más esetben az utolsó két számjegy összege legalább 3, s így az első három helyre csak 000 lenne írható, de ez nem valódi ötjegyű szám. Összesen tehát $6+1=7$ lehetőségünk van.

4. Karcsinak 20 papagája van, melyek között van feketesapkás, jákó, nimfa és Sándor. 17 papagáj nem jákó, 5 Sándor és 12 nem feketesapkás. Hány nimfapapagája van Karcsinak?

Megoldás: Jelölje f a feketesapkás, j jákó, n a nimfa, s pedig a Sándor papagájok számát. Felírhatjuk a következő egyenleteket:

$$f + j + n + s = 20,$$

$$f + n + s = 17,$$

$$s = 5,$$

$$j + n + s = 12.$$

Az s értékének behelyettesítésével megkapjuk, hogy:

$$f + j + n = 15,$$

$$f + n = 12,$$

$$j + n = 7.$$

Az első két egyenlet összevonásából megállapíthatjuk, hogy $j = 3$, ami a harmadik egyenletbe helyettesítve megadja a megoldást: $n = 4$. Karcsinak tehát 4 nimfa papagája van.

8. évfolyam

1. A bíróságon András, Béla és Csaba ugyanazokra a kérdésekre válaszoltak, s mindegyikre igennel, vagy nemmel. Azokra a kérdésekre, amelyekre Béla és Csaba igennel válaszolt, András is igent mondott. Azokra a kérdésekre, amelyekre András igent mondott, azokra Béla is igennel válaszolt, s amelyekre Béla igent mondott, azokra igent mondott András és Csaba közül legalább az egyik. Bizonyítsd be, hogy András és Béla minden kérdésre ugyanazt a választ adta.

Megoldás: Tegyük fel, hogy volt olyan kérdés, amelyre András és Béla különböző választ adtak. Ekkor András **nem**-et kellett mondjon, különben András **igen**-jére a feltétel miatt Béla is **igent** mondott volna. Így András és Csaba közül Csaba **igent** kellett mondjon. Béla és Csaba **igen**-je miatt András is **igent** mondott, ami ellentmond a feltevésünknek, ezért annak ellenkezője igaz, vagyis valóan András és Béla minden kérdésre ugyanazt a választ adta.

2. Egy 13 gyöngyből álló gyöngysor középső szeme a legnagyobb és a legértékesebb. Az egyik vége felé a szemek értéke szemről-szemre 200 dinárral, a másik vége felé pedig ugyanígy 300 dinárral csökken. Mennyit ér a középső szem, ha az egész gyöngysor ára 17-szer annyi, mint a középső szemtől számított ötödik szem ára a kevésbé értékes oldalon?

Megoldás: Legyen a legértékesebb gyöngy ára x dinár. Ekkor a gyöngysor értéke
$$x + (x - 200) + (x - 400) + (x - 600) + (x - 800) + (x - 1000) + (x - 1200) +$$
$$+ (x - 300) + (x - 600) + (x - 900) + (x - 1200) + (x - 1500) + (x - 1800) =$$
$$= 13x - 10500.$$

A feltétel szerint a kevésbé értékes oldalon az ötödik szem ára $x - 1500$ dinár, tehát

$$17(x - 1500) = 13x - 10500,$$

amiből $x = 3750$ dinár.

3. Van-e két olyan négyzetszám, amelyeknek a különbsége 2012? Melyek ezek? Hány ilyen pár van?

Megoldás: Ha a^2 és b^2 jelöli a keresett négyzetszámokat, akkor

$$a^2 - b^2 = 2012.$$

Mivel $2012 = 2^2 \cdot 503$ és 503 prímszám, ezért az $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ azonosságot felhasználva két olyan pozitív egészket keresünk, amelyek szorzata 2012, vagyis 2012 társosztóiira van szükségünk. A 2012 pozitív osztói: 1, 2, 4, 503, 1006 és 2012, így az $(1, 2012)$, $(2, 1006)$, $(4, 503)$

Számpárok vezethetnek megoldáshoz.

Az $a + b > a - b$ összefüggés miatt az

$a + b$	$a - b$
2012	1
1006	2
503	4

lehetőségekből csak az

$$a + b = 1006$$

$$a - b = 2$$

vezet megoldáshoz, például úgy, hogy a két egyenletet összeadjuk és az így nyert

$$2a = 1008$$

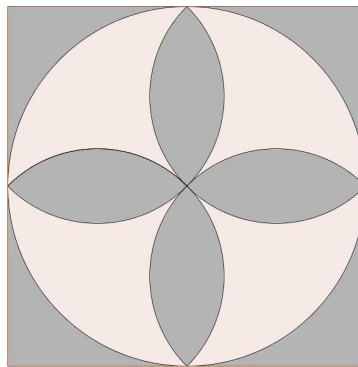
egyenletből $a = 504$, ezt behelyettesítve a második egyenletbe pedig $b = 502$ adódik.

Behelyettesítve az eredeti egyenletbe

$$504^2 - 502^2 = (504 + 502)(504 - 502) = 1006 \cdot 2 = 2012,$$

azaz pontosan két négyzetszám van, 504^2 és 502^2 , amelyek különbsége 2012.

4. Az ábrán egy egységnyi oldalú négyzetet, egy ebbe írt kört, és négy, a négyzet szomszédos oldalainak felezőpontját összekötő szakasz fölé írt félkört szerkesztettük meg. Mutasd meg, hogy az árnyékolt részek területének összege egyenlő (a négyzeten belüli) üresen hagyott részek területösszegével.



Megoldás: Jelölje T_1 az egységnyi oldalú négyzet és a beírható köre közötti különbséget, azaz $T_1 = 1 - \frac{\pi}{4}$. Legyen T_2 a beírható körön belüli szirmok területe, azaz

$$T_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}. \text{ Az árnyékolt területek összege így } T_s = T_1 + T_2 = 1 - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Az üresen hagyott terület nagyságát megkapjuk, ha a beírható kör területéből kivonjuk

$$\text{a szirmok területét, azaz } T = \frac{\pi}{4} - T_2 = \frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}.$$

Ebből adódik, hogy $T_s = T$, azaz a két terület egyenlő, mert mindkettő egyenlő az egységnyi négyzet területének felével.

9. évfolyam

1. Van-e két olyan négyzetszám, amelyeknek a különbsége 2012? Melyek ezek? Hány ilyen pár van?

Megoldás: Ha a^2 és b^2 jelöli a keresett négyzetszámokat, akkor

$$a^2 - b^2 = 2012.$$

Mivel $2012 = 2^2 \cdot 503$ és 503 prímszám, ezért az $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ azonosságot felhasználva két olyan pozitív egészet keresünk, amelyek szorzata 2012, vagyis 2012 társosztóira van szükségünk. A 2012 pozitív osztói: 1, 2, 4, 503, 1006 és 2012, így az $(1, 2012)$, $(2, 1006)$, $(4, 503)$

Számpárok vezethetnek megoldáshoz.

Az $a+b > a-b$ összefüggés miatt az

$a+b$	$a-b$
2012	1
1006	2
503	4

lehetőségekből csak az

$$a+b=1006$$

$$a-b=2$$

vezet megoldáshoz, például úgy, hogy a két egyenletet összeadjuk és az így nyert

$$2a=1008$$

egyenletből $a=504$, ezt behelyettesítve a második egyenletbe pedig $b=502$ adódik.

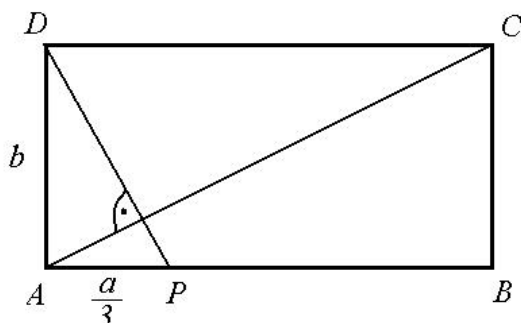
Behelyettesítve az eredeti egyenletbe

$$504^2 - 502^2 = (504+502)(504-502) = 1006 \cdot 2 = 2012,$$

azaz pontosan két négyzetszám van, 504^2 és 502^2 , amelyek különbsége 2012.

2. Jelöljük P -vel az $ABCD$ téglalap AB oldalának A -hoz közelebb eső harmadoló pontját. Tudjuk, hogy a PD szakasz az AC átlóval derékszöget zár be. Határozd meg a téglalap oldalainak arányát!

Megoldás: Jelölje az AB és AD oldal hosszát rendre a és b .



$\angle PAD = \angle CBA$ a téglalap definíciója miatt, és $\angle ADP = \angle BAC$, mivel merőleges szárú szögek. Így az APD és a BCA háromszögek hasonlóak, mert két-két szögük egyenlő, így megfelelő oldalaink aránya is egyenlő: $|AP| : |AD| = |BC| : |BA|$, vagyis

$$\frac{a}{3} : b = b : a, \text{ ahonnan } \frac{a^2}{b^2} = 3, \text{ vagyis a téglalap oldalainak aránya } \sqrt{3}.$$

3. Egy röplabda bajnokságban öt csapat vesz részt. Mindegyik csapat megmérkőzik mindegyik csapattal. Az első csapat x_1 -szer nyert és y_1 -szer veszített, a második csapat x_2 -ször nyert és y_2 -ször veszített,..., az ötödik csapat x_5 -ször nyert és y_5 -ször veszített. (A röplabdában nincs döntetlen.) Bizonyítsd be, hogy $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_5^2 = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_5^2$.

Megoldás: Mivel minden csapat másik négy csapattal játszik, ezért $x_1 + y_1 = x_2 + y_2 = \dots = x_5 + y_5 = 4$, továbbá az egész bajnokságban ugyanannyi a megnyert és az elvesztett mérkőzések száma, vagyis

$$x_1 + x_2 + \dots + x_5 = y_1 + y_2 + \dots + y_5.$$

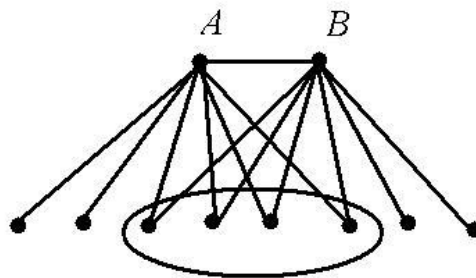
Alakítsuk át a bizonyítandó egyenlőséget:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_5^2 &= y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_5^2 \Leftrightarrow \\ x_1^2 - y_1^2 + x_2^2 - y_2^2 + \dots + x_5^2 - y_5^2 &= 0 \Leftrightarrow \\ (x_1 + y_1)(x_1 - y_1) + (x_2 + y_2)(x_2 - y_2) + \dots + (x_5 + y_5)(x_5 - y_5) &= 0 \Leftrightarrow \\ 4(x_1 - y_1) + 4(x_2 - y_2) + \dots + 4(x_5 - y_5) &= 0 \Leftrightarrow \\ 4(x_1 + x_2 + \dots + x_5 - y_1 - y_2 - \dots - y_5) &= 0. \end{aligned}$$

Az utolsó egyenlőség nyilvánvalóan fennáll, mert a zárójelben lévő kifejezés a megoldás elején tárgyaltak miatt 0. Ezzel bebizonyítottuk az állítást.

4. Egy tíztagú társaságban mindenkinek van legalább hét ismerőse. (Az ismeretségek kölcsönösek.) Igaz-e, hogy a társaságból bármely három személynek van közös ismerőse?

Megoldás: Először nézzük meg, mit állíthatunk tetszőleges két személyről. Ha A és B személy ismerik egymást, akkor még van 6-6 ismerősük a maradék 8 fő között. Ekkor van 4 közös ismerősük, mert ha legfeljebb 3 lenne, akkor mindkettejüknek legalább 3-3 nem közös ismerőse lenne, és ez már 9 fő, pedig csak 8-an vannak. Tehát van legalább négy közös ismerősük, vagyis legfeljebb (másik) 4 olyan személy van, aki legfeljebb csak egyiküknek ismerőse.



Válasszunk most ki egy harmadik személyt, C -t. Ha C ismeri is A -t és B -t, a maradék 7 személy közül legalább ötöt kell, hogy ismerjen, de a maradék 7 személy között legfeljebb 4 olyan személy van, aki nem ismerőse A -nak is és B -nek is, így biztosan lesz C -nek olyan ismerőse, aki mindhármuknak ismerőse, vagyis az állítás igaz.

10. évfolyam

1. Egy röplabda bajnokságban öt csapat vesz részt. Mindegyik csapat megmérkőzik mindegyik csapattal. Az első csapat x_1 -szer nyert és y_1 -szer veszített, a második csapat x_2 -ször nyert és y_2 -ször veszített,..., az ötödik csapat x_5 -ször nyert és y_5 -ször veszített. (A röplabdában nincs döntetlen.) Bizonyítsd be, hogy $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_5^2 = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_5^2$.

Megoldás: Mivel minden csapat másik négy csapattal játszik, ezért $x_1 + y_1 = x_2 + y_2 = \dots = x_5 + y_5 = 4$, továbbá az egész bajnokságban ugyanannyi a megnyert és az elvesztett mérkőzések száma, vagyis

$$x_1 + x_2 + \dots + x_5 = y_1 + y_2 + \dots + y_5.$$

Alakítsuk át, a bizonyítandó egyenlőséget:

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_5^2 = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_5^2$$

$$x_1^2 - y_1^2 + x_2^2 - y_2^2 + \dots + x_5^2 - y_5^2 = 0$$

$$(x_1 + y_1)(x_1 - y_1) + (x_2 + y_2)(x_2 - y_2) + \dots + (x_5 + y_5)(x_5 - y_5) = 0$$

$$4(x_1 - y_1) + 4(x_2 - y_2) + \dots + 4(x_5 - y_5) = 0$$

$$4(x_1 + x_2 + \dots + x_5 - y_1 - y_2 - \dots - y_5) = 0.$$

Az utolsó egyenlőség nyilvánvalóan fennáll, mert a zárójelben lévő kifejezés a megoldás elején tárgyaltak miatt 0. Ezzel bebizonyítottuk az állítást.

2. Mutasd meg, hogy a $2011^{2013} + 2013^{2011}$ összeg osztható 4-gyel.

I. Megoldás: Felírható, hogy $2011^{2013} + 2013^{2011} = (4 \cdot 503 - 1)^{2013} + (4 \cdot 503 + 1)^{2011}$.

A $(4 \cdot 503 - 1)^{2013}$ első összeadandó hatványozott alakjában (4·503 miatt) minden tag osztható 4-gyel kivéve az utolsót, ezért $(4 \cdot 503 - 1)^{2013}$ 4-gyel osztva $(-1)^{2013} = -1$ maradékot ad. Az $(4 \cdot 503 + 1)^{2011}$ második összeadandó hatványozott alakjában (4·503 miatt) minden tag osztható 4-gyel kivéve az utolsót, ezért $(4 \cdot 503 + 1)^{2011}$ 4-gyel osztva $(1)^{2011} = 1$ maradékot ad.

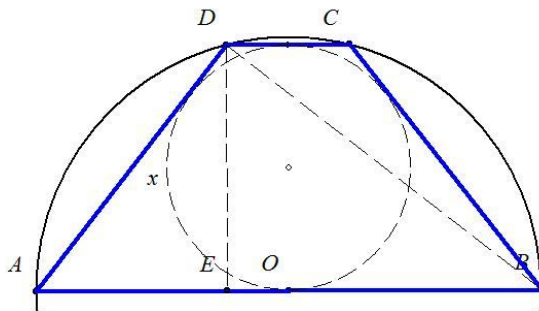
Ekkor a két tag $(4 \cdot 503 - 1)^{2013} + (4 \cdot 503 + 1)^{2011}$ összege 4-gyel osztva $-1 + 1 = 0$ maradékot ad, vagyis $2011^{2013} + 2013^{2011}$ valóban osztható 4-gyel.

II. Megoldás: Végezzük el a következő átalakításokat:

$$\begin{aligned} 2011^{2013} + 2013^{2011} &= (2012 - 1)^{2013} + (2012 + 1)^{2011} = \\ &= (2012 - 1)^2 (2012 - 1)^{2011} + (2012 + 1)^{2011} = (2 \cdot 1006 - 1)^2 (2012 - 1)^{2011} + (2012 + 1)^{2011} = \\ &= (4 \cdot 1006^2 - 4 \cdot 1006 + 1)(2012 - 1)^{2011} + (2012 + 1)^{2011} = \\ &= (4 \cdot 1006^2 - 4 \cdot 1006)(2012 - 1)^{2011} + (2012 - 1)^{2011} + (2012 + 1)^{2011} = \\ &= 4 \cdot (1006^2 - 1006)(2012 - 1)^{2011} + (2012 - 1 + 2012 + 1)A = \\ &= 4 \cdot (1006^2 - 1006)(2012 - 1)^{2011} + 4 \cdot 1006A \\ \text{ahol } A &= 2011^{2010} + 2011^{2009} \cdot 2013 + 2011^{2008} \cdot 2013^2 + \dots + 2011 \cdot 2013^{2009} + 2013^{2010}. \end{aligned}$$

3. Az $|AB|=1$ átmérőjű félkörbe olyan $ABCD$ trapéz szerkesztettünk, amely érintőnégyyszög is. Mekkora a trapéz két szára?

Megoldás: Az $ABCD$ trapéz egyenlő szárú, mert húrnégyszög. AD szárának hossza legyen x , és legyen a D csúcs merőleges vetülete az AB szakaszra E pont. Ekkor az $AEDA$ és $ADBA$ derékszögű háromszögek hasonlósága miatt $\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|AE|}{|AD|}$, vagyis $|AE| = x^2$, így $|CD| = |AB| - 2 \cdot |AE| = 1 - 2x^2$.



Mivel $ABCD$ érintőnégyyszög is, ezért $|AB| + |CD| = 2 \cdot |AD|$, azaz $1 + (1 - 2x^2) = 2x$, vagyis $x^2 + x - 1 = 0$, megoldásaiból csak a pozitív lehetséges, tehát $x = |AD| = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

4. Számítsd ki mennyi $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2011} + \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{2011} = ?$

Megoldás: Mivel a kitevők felbontásával:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2011} + \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{2011} = \\ & \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2010+1} + \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{2010+1} = \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2010} \cdot \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{2010} \cdot \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right) \\ & = \left(\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3\right)^{670} \cdot \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^3\right)^{670} \cdot \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right) = \quad * \end{aligned}$$

miközben

$$\begin{aligned} \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3 &= \frac{-1+3i\sqrt{3}-3i^2 \cdot 3+3i^3\sqrt{3}}{8} = 1 \quad \text{és} \\ \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^3 &= \frac{-1-3i\sqrt{3}-3i^2 \cdot 3-3i^3\sqrt{3}}{8} = 1, \end{aligned}$$

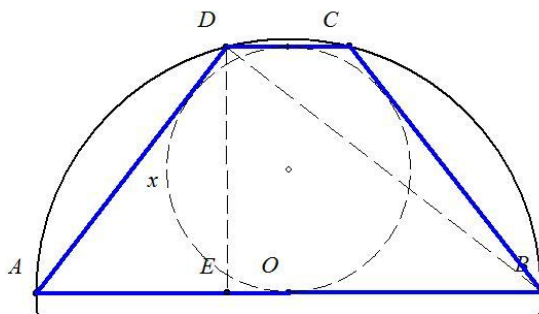
tehát folytatva *-tól:

$$= \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right) = -1.$$

11. évfolyam

1. Az $|AB|=1$ átmérőjű félkörbe olyan $ABCD$ trapézt szerkesztettünk, amely érintőnégyyszög is. Mekkora a trapéz két szára?

Megoldás: Az $ABCD$ trapéz egyenlő szárú, mert húrnégyszög. AD szárának hossza legyen x , és legyen a D csúcs merőleges vetülete az AB szakaszra E pont. Ekkor az $AEDA$ és $ADBA$ derékszögű háromszögek hasonlósága miatt $\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|AE|}{|AD|}$, vagyis $|AE| = x^2$, így $|CD| = |AB| - 2 \cdot |AE| = 1 - 2x^2$.



Mivel $ABCD$ érintőnégyyszög is, ezért $|AB| + |CD| = 2 \cdot |AD|$, azaz $1 + (1 - 2x^2) = 2x$, vagyis $x^2 + x - 1 = 0$, megoldásaiból csak a pozitív lehetséges, tehát $x = |AD| = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

2. Oldd meg a $3^{\cos 2x} \cdot (4 \cdot 3^{\sin^2 x} - 9) = 1$ egyenletet!

Megoldás: Végezzük el a következő transzformációkat:

$$3^{\cos 2x} \cdot (4 \cdot 3^{\sin^2 x} - 9) = 1 \qquad 3^{\cos^2 x - \sin^2 x} \cdot (4 \cdot 3^{\sin^2 x} - 9) = 1$$

$$3^{1-2\sin^2 x} \cdot (4 \cdot 3^{\sin^2 x} - 9) = 1 \qquad \frac{3}{3^{2\sin^2 x}} \cdot (4 \cdot 3^{\sin^2 x} - 9) = 1$$

Alkalmazzuk a $3^{\sin^2 x} = t$ helyettesítést. Ekkor a $\frac{3}{t^2}(4t - 9) = 1$, illetve rendezés után a $t^2 - 12t + 27 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk, amelynek megoldásai $t_1 = 9$ és $t_2 = 3$. Visszahelyettesítés után kapjuk a $\sin^2 x = 1$ és a $\sin^2 x = 2$ egyenleteket, ahol csak az elsőnek van megoldása, $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$.

3. Számítsd ki mennyi $A = \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2011} + \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{2011}$?

Megoldás: Mivel a kitevők felbontásával:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2011} + \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{2011} = \\ &= \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2010+1} + \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{2010+1} = \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2010} \cdot \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{2010} \cdot \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \left(\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3\right)^{670} \cdot \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^3\right)^{670} \cdot \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right) \quad * \end{aligned}$$

miközben

$$\begin{aligned} \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3 &= \frac{-1+3i\sqrt{3}-3i^2 \cdot 3+3i^3\sqrt{3}}{8} = 1 \quad \text{és} \\ \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^3 &= \frac{-1-3i\sqrt{3}-3i^2 \cdot 3-3i^3\sqrt{3}}{8} = 1, \end{aligned}$$

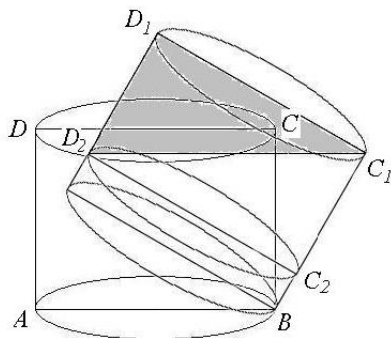
tehát folytatva *-tól:

$$A = \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right) = -1.$$

4. Egy henger alakú edény alapátmérője 4dm, mélysége 3dm, színültig telve van vízzel. Ha megbillentjük az edényt 30°-kal a vízszintes helyzethez viszonyítva, mennyi víz marad benne?

Megoldás: A kiömlött víz mennyisége egyenlő a $C_1C_2D_1D_2$ henger térfogatának felével. Mivel az edény térfogata $V = 2^2\pi \cdot 3 = 12\pi \text{ dm}^3$, $\{r = 2\text{dm}, H = 3\text{dm}\}$,

ebből kivonjuk a $\frac{1}{2}V_{C_1C_2D_1D_2} = \frac{8\sqrt{3}}{3}\pi \text{ dm}^3$, $\{r = 2\text{dm}, H_{C_1C_2D_1D_2}\}$ térfogatot. Ekkor



$$V - \frac{1}{2}V_{C_1C_2D_1D_2} = 12\pi - \frac{8\sqrt{3}}{3}\pi \approx \left(12 - \frac{8}{1,73}\right) \cdot 3,14 \approx 23,19\text{l}$$

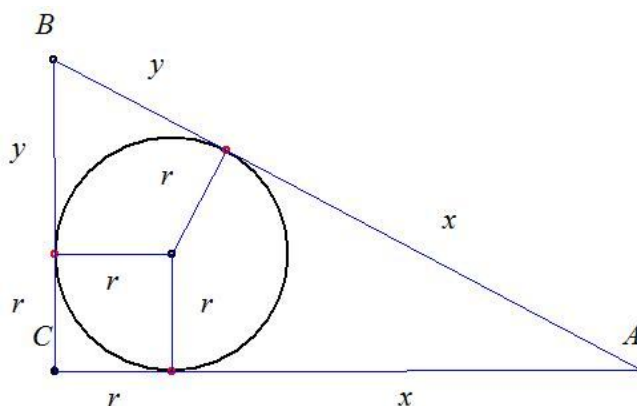
12. évfolyam

1. Bizonyítsd be, hogy a derékszögű háromszög beírt körének átmérője mértani közepe az átfogó és az egyik befogó különbségének, valamint az átfogó és a másik befogó különbsége kétszeresének.

Megoldás: Jelöljük a derékszögű háromszög befogóit a -val és b -vel, átfogóját c -vel, beírt körének sugarát pedig r -rel.

Az átfogó és a befogók különbségei $c-a$ és $c-b$, az átmérő hossza $2r$.

Bizonyítandó, hogy $2r = \sqrt{2(c-a)(c-b)}$, vagy a négyzetre emelés és 2-vel való osztás után, hogy $(c-a)(c-b) = 2r^2$.



A beírt kör érintőszakaszaiból következik, hogy:

$$\left. \begin{array}{l} a = r + y \\ b = r + x \\ c = x + y \end{array} \right\} \Rightarrow a + b = x + y + 2r = c + 2r \Rightarrow c = a + b - 2r$$

Továbbá a háromszög területképleteiből következik, hogy:

$$T_{\Delta} = \frac{ab}{2} = sr = \frac{a+b+c}{2}r \Rightarrow ab = (a+b+c)r$$

Az utóbbi az első összefüggésből következik, hogy:

$$ab = (a + b + c)r = (a + b + a + b - 2r)r = 2r(a + b - r).$$

Ekkor $(c-a)(c-b) = c^2 - ac - bc + ab = (a^2 + b^2) - c(a+b) + ab$.

Kihasználva c -re a levezetett képletet, következik, hogy:

$$(c-a)(c-b) = (a^2 + b^2) - (a+b-2r)(a+b) + ab.$$

Rendezés után:

$$\begin{aligned}(c-a)(c-b) &= (a^2 + b^2) - (a+b-2r)(a+b) + ab = \\ &= a^2 + b^2 - a^2 - ab - ba - b^2 + 2ar + 2br + ab = \\ &= 2r(a+b) - ab,\end{aligned}$$

majd kihasználva ab -re a levezetett képletet, következik, hogy:

$$\begin{aligned}(c-a)(c-b) &= 2r(a+b) - ab = 2r(a+b) - 2r(a+b-r) = \\ &= 2r(a+b-a-b+r) = 2r \cdot r,\end{aligned}$$

s így $(c-a)(c-b)=2r^2$, amit igazolnunk kellett.

2. Oldd meg a $\operatorname{tg} x \cdot (4 \cdot 3^{\cos^2 x} - 9 \cdot 3^{\cos 2x} - 1) = 0$ egyenletet!

Megoldás: Az egyenlet értelmezett ha $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Egy szorzat akkor 0, ha valamelyik tényezője 0. Ezért:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x = 0 & \quad \vee \quad 4 \cdot 3^{\cos^2 x} - 9 \cdot 3^{\cos^2 x - \sin^2 x} = 1 \\ x = k\pi, k \in \mathbb{Z} & \quad \vee \quad 4 \cdot 3^{\cos^2 x} - 9 \cdot 3^{\cos^2 x - (1 - \cos^2 x)} = 1. \end{aligned}$$

Továbbá:

$$\begin{aligned} 4 \cdot 3^{\cos^2 x} - 9 \cdot 3^{2\cos^2 x - 1} &= 1 \\ 4 \cdot 3^{\cos^2 x} - \frac{9}{3} \cdot (3^{\cos^2 x})^2 &= 1 \\ 4 \cdot 3^{\cos^2 x} - \frac{9}{3} \cdot (3^{\cos^2 x})^2 &= 1 \end{aligned}$$

Ha $3^{\cos^2 x} = t$, akkor $4t - 3 \cdot t^2 = 1$, illetve $3t^2 - 4t + 1 = 0$.

Ennek megoldásai $t_1 = 1$, $t_2 = \frac{1}{3}$.

Ha $3^{\cos^2 x} = 1$, akkor $\cos^2 x = 0$, illetve $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ha $3^{\cos^2 x} = 0$, akkor $\cos^2 x = -1$, ami lehetetlen.

Az $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ megoldásokat az értelmezési tartomány miatt nem fogadjuk el, s így az adott egyenlet megoldáshalmaza $M = \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

3. Létezik-e olyan $\{a_n\}$ mértani sorozat amelyben $\frac{1}{3}(a_1 + a_3 + a_4) = \frac{1}{2}(a_2 + a_4)$?

A választ indokold meg!

Megoldás:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}(a_1 + a_3 + a_4) &= \frac{1}{2}(a_2 + a_4) \\ \frac{1}{3}(a_1 + a_1 q^2 + a_1 q^3) &= \frac{1}{2}(a_1 q + a_1 q^3) \\ \frac{1}{3} a_1 (1 + q^2 + q^3) &= \frac{1}{2} a_1 (q + q^3) \\ \frac{1}{3} a_1 (1 + q^2 + q^3) - \frac{1}{2} a_1 (q + q^3) &= 0 \\ a_1 \left(\frac{1 + q^2 + q^3}{3} - \frac{q + q^3}{2} \right) &= 0 \Leftrightarrow a_1 = 0 \quad \vee \quad \frac{1 + q^2 + q^3}{3} = \frac{q + q^3}{2}, \end{aligned}$$

innen $a_1 = 0 \quad \vee \quad 2 + 2q^2 + 2q^3 = 3q + 3q^3$

illetve $a_1 = 0 \quad \vee \quad q^3 - 2q^2 + 3q - 2 = (q - 1)(q^2 - q + 2) = 0$.

Ha $a_1 = 0$, akkor a keresett sorozat az $\{a_n\}$: $0, 0, 0, \dots$ állandó sorozat.

Ha $q=1$, akkor a keresett sorozat az $\{a_n\}$: $a_1, a_1, a_1, \dots$ állandó sorozat, ahol $a_1 \in \mathbb{R}$.
A $q^2 - q + 2 = 0$ egyenletnek nincs valós megoldása.

Van olyan mértani sorozat, amely kielégíti az adott feltételt, méghozzá az állandó sorozatok: $\{a_n\}$: $a_1, a_1, a_1, \dots$, ahol $a_1 \in \mathbb{R}$.

4. A szabályos négyoldalú gúla oldaléleinek hossza 1, négyzet alakú alapjának élé pedig x . Határozd meg a gúla $V(x)$ térfogatát az x függvényében, majd számítsd ki a $W(x) = 18 \cdot V(x)^2$ függvény lehető legnagyobb értékét!

Megoldás: A gúla térfogata

$$V(x) = \frac{1}{3} |BH| = \frac{1}{3} x^2 H = \frac{1}{3} x^2 \sqrt{1 - \left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{1}{3} x^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{2}},$$

és ez $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ esetén értelmezett. Ekkor a

$$W(x) = 18 \cdot V(x)^2 = \frac{18}{9} x^4 \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) = 2x^4 - x^6$$

függvény maximumát kell keresni, ami $W'(x) = 0$ és $W''(x) < 0$ feltételek mellett teljesül. Mivel x a gúla alapjának hossza, így

$$W'(x) = 8x^3 - 6x^5 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 4 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Mivel $W''(x) = 24x^3 - 30x^5$, így

$$W''\left(x = \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = 24 \cdot \frac{24\sqrt{3}}{27} - 30 \cdot \frac{16 \cdot 9}{81} = \frac{64\sqrt{3} - 160}{3} < 0$$

ami azt jelenti, hogy a $W(x)$ függvény az $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ -ban éri el a maximumát.

A függvény lehető legnagyobb értéke

$$W_{\max}\left(x = \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = 2\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^4 - \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^6 = \frac{32}{27}.$$

A IX. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY DÍJAZOTTJAI

7. évfolyam

1. Szögi Evelin, Kis Ferenc Általános Iskola, Orom, **I. díj**
2. Fenyvesi Abigél, Stevan Sremac Általános Iskola – Nov. 11, Zenta, **I. díj**
3. Szalaji Natália, Miroslav Antić Általános Iskola, Palics, **II. díj**
4. Vrbaski Viktor, Jovan Mikić Általános Iskola, Szabadka, **II. díj**
5. Korhecz Réka, Miroslav Antić Általános Iskola, Palics, **III. díj**
6. Fa Dávid, Majsai úti Általános Iskola, Szabadka, **III. díj**
7. Szalma Réka, Petőfi Sándor Általános Iskola, Hajdújárás, **dicséret**
8. Hajdú Csongor, Majsai úti Általános Iskola, Szabadka, **dicséret**
9. Dragić Teodóra, Stevan Sremac Általános Iskola – Nov. 11, Zenta, **dicséret**
10. Vécsei Orsolya, Miroslav Antić Általános Iskola, Palics, **dicséret**
11. Polgár Ákos, Stevan Sremac Általános Iskola – Nov. 11, Zenta, **dicséret**
12. Vékony Vivien, Jovan Jovanović Zmaj Általános Iskola, Szenttamás, **dicséret**
13. Erdélyi Valentina, Miroslav Antić Általános Iskola, Palics, **dicséret**
14. Sörös Vince, Miroslav Antić Általános Iskola, Palics, **dicséret**

8. évfolyam

1. Kozák Sánta Vivien Dóra, Kizúr István Általános Iskola, Szabadka, **I. díj**
2. Terhes Balázs, Stevan Sremac Általános Iskola – Emlékiskola, Zenta, **I. díj**
3. Kovács Anna, Sonja Marinković Általános Iskola, Nagybecskerek, **II. díj**
4. Borsos Teodóra, Csokonai Vitéz Mihály Általános Iskola, Felsőhegy, **II. díj**
5. Horti Katalin, Stevan Sremac Általános Iskola – Emlékiskola, Zenta, **III. díj**
6. Szabó Emília, Hunyadi János Általános Iskola, Csantavér, **III. díj**
7. Mucsi Edina, Csokonai Vitéz Mihály Általános Iskola, Felsőhegy, **dicséret**
8. Benkó Zoltán, Miloš Crnjanski Általános Iskola, Szabadka, **dicséret**
9. Patyi Gábor, Miroslav Antić Általános Iskola, Palics, **dicséret**
10. Dobó Márk, Petőfi Sándor Általános Iskola, Hajdújárás, **dicséret**
11. Juhász Bence, Csokonai Vitéz Mihály Általános Iskola, Felsőhegy, **dicséret**
12. Mészáros Angéla, Stevan Sremac Ált. Iskola – Emlékiskola, Zenta, **dicséret**
13. Kőrösi Ágota, Cseh Károly Általános Iskola, Ada, **dicséret**
14. Nagy Torma Norbert, Miloš Crnjanski Általános Iskola, Szabadka, **dicséret**
15. Berec Judit, Jovan Jovanović Zmaj Általános Iskola, Magyarakanizsa, **dicséret**
16. Balázs Petra, Jovan Jovanović Zmaj Általános Iskola, Magyarakanizsa, **dicséret**

9. évfolyam

1. Szilágyi Krisztina, Jovanović Zmaj Gimnázium, Újvidék, **I. díj**
2. Kovacsics Viola, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **I. díj**
3. Kanalas Dávid, Matematikai Gimnázium, Belgrád, **I. díj**
4. Kovacsics Flórián, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **II. díj**
5. Téglás Ervin, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
6. Palotás Sámuel, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
7. Miliszávyevity Laura, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **III. díj**
8. Vrábel Máté Dávid, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**
9. Petrás Ármin, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **dicséret**
10. Kiss Tamás, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **dicséret**
11. Patarica Ildikó, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **dicséret**
12. Rozsnyik Szabolcs, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**

10. évfolyam

1. Bíró Dominik, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
2. Szilágyi Dániel, Jovanović Zmaj Gimnázium, Újvidék, **I. díj**
3. Horti Krisztina, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
4. Tokity Rudolf, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
5. Mátéffy Kristóf, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
6. Francia Krisztina, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **dicséret**
7. Major Kristóf, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **dicséret**
8. Zsúnyi Mónika, Lukijan Mušicki Középiskola, Temerin, **dicséret**
9. Mészáros Ákos, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **dicséret**

11. évfolyam

1. Balzam Henrietta, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
2. Skultéti Anikó, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
3. Bakos Evelin, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **III. díj**
4. Kiskároly Tímea, Dositej Obradović Gimnázium, Topolya, **dicséret**
5. Pletikoszity Johanna, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **dicséret**

12. évfolyam

1. Piri Annamária, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
2. Körmöczy Andor, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
3. Máriás Mónika, Becsei Gimnázium, Óbecse, **II. díj**
4. Nagygyörgy Kristóf, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **III. díj**
5. Kőrösi Balázs, Műszaki Középiskola, Ada, **III. díj**
6. Simonyi Máté, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **dicséret**



A verseny díjazottjai.

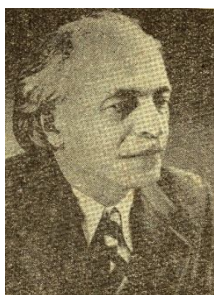
A X. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Előadó: dr. Hatvani László

Előadás címe: Matematikai modellezés



Versenyszervezők javítás közben, jókedvűen (Ripcó Sipos Elvira és Csikós Pajor Gizella).



X. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2012. december 1.

7. évfolyam

1. Egy röplabda versenyen 5 csapat vett részt. A csapatkapitányok: Kriszta, Éva, Zsófi, Piri és Réka. A verseny után a lányok így nyilatkoztak az eredményről:
Kriszta: Piri csapata lett a második. Mi csak a harmadikok lettünk.

Éva: Nyertünk. Zsófiék lettek a másodikok.

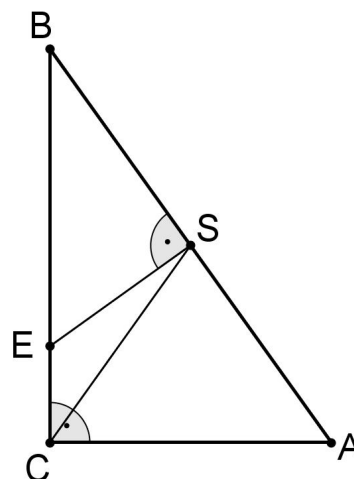
Piri: Másodikok lettünk. Rékaék csak a negyedik helyet csípték el.

Réka: Csak a negyedikek lettünk. Jó Krisztának, ők nyertek.

Zsófi: Harmadikok lettünk. Évák lettek az utolsók.

Ki milyen helyezést ért el, ha tudjuk, hogy a lányok állításai közül egyik igaz, a másik hamis?

2. Az ABC derékszögű háromszögben az S pont az AB átfogó felezőpontja, ahol $|SC| = 20$. Az AC (hosszabb) befogóra berajzoljuk az E pontot úgy, hogy $ES \perp AB$ és $|ES| = 15$. Számítsd ki az ABC háromszög területét!

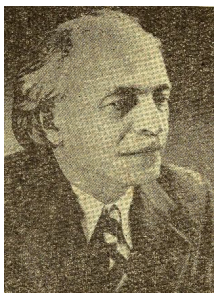


3. Melyik az a háromjegyű természetes szám, amely ötszöröse a számjegyei szorzatának?

4. A Mézga családban Géza, az apuka, Paula, az anyuka, Kriszta és Aladár, a gyerekek, összesen 111 évesek. Paula és Kriszta összesen 1 évvel idősebbek, mint Géza és Aladár együtt. Géza négyszer olyan idős, mint Aladár, egy évvel ezelőtt pedig Paula négyszer olyan idős volt, mint Aladár. Hány évesek külön-külön a Mézga család tagjai?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



X. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2012. december 1.

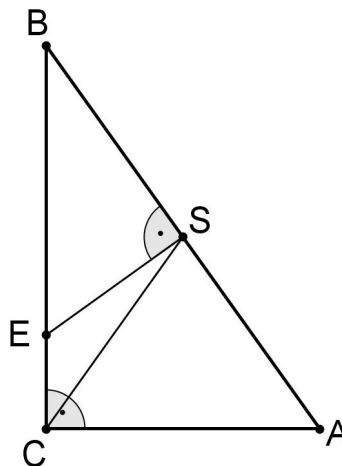
8. évfolyam

1. A Mézga családban Géza, az apuka, Paula, az anyuka, Kriszta és Aladár, a gyerekek, összesen 111 évesek. Paula és Kriszta összesen 1 évvel idősebbek, mint Géza és Aladár együtt. Géza négyszer olyan idős, mint Aladár, egy évvel ezelőtt pedig Paula négyszer olyan idős volt, mint Aladár. Hány évesek külön-külön a Mézga család tagjai?

2. Határozd meg mindazokat az n kétjegyű természetes számokat, amelyekre a

$$\sqrt{\frac{n+24}{n-24}}$$
 szám természetes szám!

3. Az ABC derékszögű háromszögben az S pont az AB átfogó felezőpontja, ahol $|SC|=20$. Az AC (hosszabb) befogóra berajzoljuk az E pontot úgy, hogy $ES \perp AB$ és $|ES|=15$. Számítsd ki az ABC háromszög területét!



4. Számold ki az

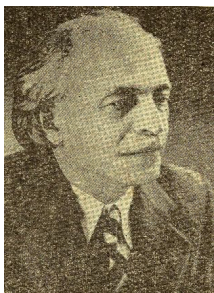
a) xy kifejezés értékét, majd az

b) $(x+y)^2$ kifejezés értékét, ha tudjuk, hogy

$$\frac{2}{x} - \frac{2}{y} = 1 \text{ és } y - x = 1.$$

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



X. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2012. december 1.

9. évfolyam

1. Óránk éppen egy 4 és 5 óra közötti időpontot mutat. Egy 7 és 8 óra közötti pillanatban a két mutató az előbbi helyzethez képest helyet cserélt. Hány óra volt a két időpontban?

2. Milyen arányban osztják az $ABCDEF$ szabályos hatszög AC és BF átlói egymást?

3. Mely pozitív x, y, z egész számokra igaz, hogy

$$x^2y - yz^2 - x^2 + z^2 = 30?$$

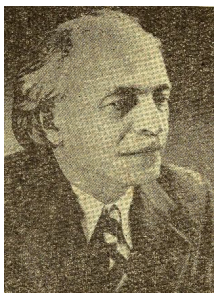
4. Arthur király n számú lovagja egy kerek asztal körül ül. Minden lovagnál vagy fehérboros, vagy vörösboros kupa van. Pontban éjfélkor minden lovag, akinél vörösbor van, átadja a kupáját a jobb oldali szomszédjának, akinél pedig fehérbor van, átnyújtja a kupáját a bal oldali második szomszédjának. Tudjuk, hogy van vörösbor is és fehérbor is az asztalon. Add meg a fehérboros és vörösboros kupák egy lehetséges elrendezését, hogy éjfél után is mindenkinek legyen kupája, ha

- a) $n = 12$;
- b) $n = 13$;
- c) $n = 2013$.

Ha valamelyik esetben ilyen elrendezése a fehér- és vörösboroknak nem létezik, indokold meg, miért nem.

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



X. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

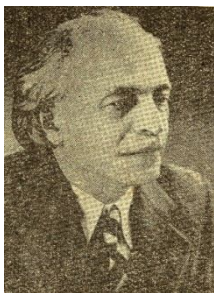
Zenta, 2012. december 1.

10. évfolyam

1. Hány olyan pozitív egész szám van, amelyre igaz, hogy a számjegyeinek összege és szorzata is egyaránt 24?
2. Mely x és y nemnegatív egész számokra igaz, hogy $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1000}$?
3. Az O középpontú $AB = 2r$ átmérőjű félkörön felvesszük a C és D pontokat úgy, hogy az AD és BC húrok hossza egyaránt a , a CD húr hossza pedig x . Bizonyítsd be, hogy ha a és r mérőszáma racionális szám, akkor x mérőszáma is racionális szám! (Vedd figyelembe a pontok minden lehetséges elrendezését!)
4. Legyenek $A = 177\dots76$ és $B = 355\dots52$ rendre $2k+3$ és $k+2$ számjegyű számok. Bizonyítsd be, hogy $\sqrt{A-B}$ is természetes szám és határozd meg a számjegyeinek számát!

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



X. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2012. december 1.

11. évfolyam

1. Az $f(x) = ax^2 + bx + c$ másodfokú függvénynek ($x \in R$, $a \neq 0$) egy nullahelye van. Az $f(x)$ függvény minimumhelye $x = c$. Mekkora az ac szorzat értéke? Melyek ezek a függvények?

2. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned}x^3 + y^3 + z^3 &= 8 \\x^2 + y^2 + z^2 &= 22 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= \frac{-z}{xy}\end{aligned}$$

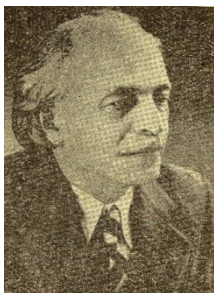
3. A szabályos háromoldalú $ABCS$ gúla alaplappja ABC , amelynek élei a cm hosszúságúak, csúcsa pedig S . Számítsd ki az adott gúla térfogatát, ha az A csúcs távolsága a szemköztes oldallaptól h cm.

4. Igazold, hogy

$$\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}.$$

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



X. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2012. december 1.

12. évfolyam

1. Ha x valós szám és $x^3 + \frac{1}{x^3} = 18$, akkor számítsd ki $x^5 + \frac{1}{x^5}$ értékét!

2. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenletrendszert!

$$\begin{array}{rclcl} x^3 & + & y^3 & + & z^3 & = & 8 \\ x^2 & + & y^2 & + & z^2 & = & 22 \\ \frac{1}{x} & + & \frac{1}{y} & + & \frac{1}{z} & = & \frac{-z}{xy} \end{array}$$

3. Az ABC egyenlő szárú háromszögben ($|AB| = |AC|$) az AA' magasságvonal a háromszög köré írt kört E pontban, míg az EAC szögfelezője a kört D pontban metszi. A körhöz D pontban húzott érintő az AE, AC, BC egyeneseket, rendre, az F, I, L pontokban metszi.

a) Bizonyítsd be, hogy ha M a háromszög magasságpontja, akkor a $BMCE$ négyszög rombusz!

b) Igazold, hogy $ABFL$ húrnégyszög!

4. Adott az $f(x) = x^3 + px + q$ függvény, ahol p és q valós paraméterek.

a) Ha M a függvény helyi maximuma és m a függvény helyi minimuma, akkor fejezd ki a paraméterek segítségével az Mm kifejezést!

b) Ha -2 a függvény nullahelye, határozd meg a p és q értékeit úgy, hogy $M - m = 4$ teljesüljön!

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

A X. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI

7. évfolyam

1. Egy röplabda versenyen 5 csapat vett részt. A csapatkapitányok: Kriszta, Éva, Zsófi, Piri és Réka. A verseny után a lányok így nyilatkoztak az eredményről:

Kriszta: Piri csapata lett a második. Mi csak a harmadikok lettünk.

Éva: „Nyertünk. Zsófiék lettek a másodikok.”

Piri: „Másodikok lettünk. Rékáék csak a negyedik helyet csípték el.”

Réka: „Csak a negyedikek lettünk. Jó Krisztának, ők nyertek.”

Zsófi: „Harmadikok lettünk. Évák lettek az utolsók.”

Ki milyen helyezést ért el, ha tudjuk, hogy a lányok állításai közül egyik igaz, a másik hamis.

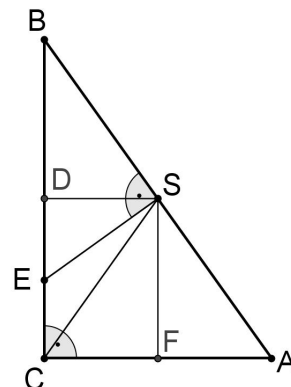
Megoldás: Kriszta két állítása közül egyik igaz, a másik hamis. Ha az első állítás igaz, akkor Piri csapata lett a második. Ekkor Éva második állítása hamis, tehát Évák lettek az elsők. Piri első állítása igaz, ezért Rékáék nem lehettek negyedikek. Réka állítása miatt, az előzőből az következik, hogy Kriszták is elsők lettek, ami lehetetlen. Ezek szerint Kriszta első állítása hamis, tehát a második igaz.

Kriszták harmadikok lettek. Mivel Piriék nem másodikok, ezért Piri mondataiból arra következtethetünk, hogy Rékáék lettek a negyedikek. Zsófi első mondata nem lehet igaz, ezért Évák lettek az utolsók. Ezek szerint Éva első mondata hamis, és Zsófi csapata a szerzte meg a második helyet. Az első helyezett így csak Piri csapata lehetett. A helyes sorrend: 1. Piri, 2. Zsófi, 3. Kriszta, 4. Réka, 5. Éva.

2. Az ABC derékszögű háromszögben az S pont az AB átfogó felezőpontja, ahol $|SC| = 20$. Az AC (hosszabb) befogóra berajzoljuk az E pontot úgy, hogy $ES \perp AB$ és $|ES| = 15$. Számítsd ki az ABC háromszög területét!

Megoldás: Mivel az S pont az AB átfogó felezőpontja, így adódik, hogy $|SC| = |SB| = |SA| = 20$.

Ekkor az ASE derékszögű háromszögből a Pitagorasz tétel alapján adódik, hogy $|AE| = 25$. Legyen D az S pontból az AC befogóra bocsátott merőleges talppontja, F pedig az S pontból az BC befogóra bocsátott merőleges talppontja. Mivel SD az ASE háromszög magasságvonala, ezért $|AE| \cdot |SD| = |SE| \cdot |SA|$, azaz $25 \cdot |SD| = 15 \cdot 20$, amelyből következik, hogy $|SD| = 12$. A $CDSF$



négyszög téglalap, mert minden szöge derékszög, ezért a szemben fekvő oldalai egyenlőek. A BCS háromszög egyenlő szárú, ezért az FS magasságvonala felezi a BC alapot, azaz érvényes, hogy $|BF| = |CF| = |SD| = 12$, vagyis a BC befogó hossza kiszámítható, $|BC| = 24$. Mivel az átfogó felét már ismerjük, így $|AB| = 40$. Újra alkalmazva a Pitagorasz tételt, most az ABC háromszögre, adódik, hogy $|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2$, vagyis $|AC|^2 + 24^2 = 40^2$, ahonnan adódik, hogy $|AC| = 32$.

A háromszög területe tehát $T = \frac{|BC| \cdot |AC|}{2} = \frac{24 \cdot 32}{2} = 384$.

3. Melyik az a háromjegyű természetes szám, amely ötszöröse a számjegyei szorzatának?

Megoldás: Mivel a keresett szám osztható 5-tel, utolsó számjegye 0 vagy 5. Ha 0 lenne, akkor a szorzat is nulla lenne, ami nem lehetséges, ezért a szám 5-re végződik, tehát felírhatjuk a következő alakban: $\overline{ab5}$.

Igaz hogy: $\overline{ab5} = 5(ab \cdot 5) = 25ab$

A keresett szám osztható 25-tel, és minden számjegye páratlan. Ha valamelyik számjegy páros lenne, akkor a szorzat 0-ra végződne, ami nem lehetséges, mivel az utolsó számjegy az 5.

A keresett szám $\overline{a75}$ alakú. Innen $100a + 75 = 25 \cdot 7 \cdot a$, ahonnan $a = 1$.

A keresett szám tehát a 175.

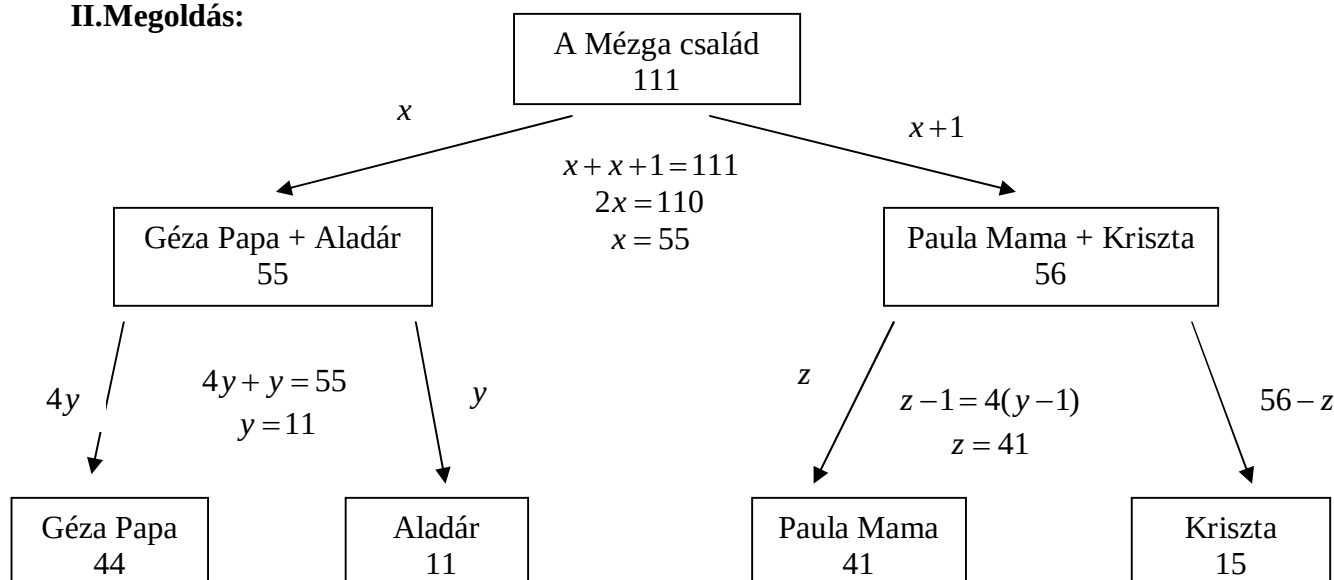
4. A Mézga családban Géza, az apuka, Paula, az anyuka, Kriszta és Aladár, a gyerekek, összesen 111 évesek. Paula és Kriszta összesen 1 évvel idősebbek, mint Géza és Aladár együtt. Géza négyszer olyan idős, mint Aladár, egy évvel ezelőtt pedig Paula négyszer olyan idős volt, mint Aladár. Hány évesek külön-külön a Mézga család tagjai?

I.Megoldás: Jelölje g Géza, p Paula, k Kriszta, a pedig Aladár éveinek számát. A feladatban megadott feltételek alapján felírhatjuk a következő egyenletrendszert:

$$g + p + k + a = 111, \quad p + k - 1 = g + a, \quad g = 4a, \quad p - 1 = 4(a - 1)$$

Az első két egyenlet alapján könnyen megkapjuk, hogy $g + a = 55$. Behelyettesítve ide a harmadik összefüggést azt kapjuk, hogy $4a + a = 55$, azaz $a = 11$ és $g = 44$. A negyedik egyenletből most $p = 4a - 3$, azaz $p = 41$. Az első egyenletből adódik most, hogy $k = 15$. Tehát Géza, az apuka, 44, Paula, az anyuka, 41, Kriszta 15, Aladár pedig 11 éves.

II.Megoldás:



8. évfolyam

1. A Mézga családban Géza, az apuka, Paula, az anyuka, Kriszta és Aladár, a gyerekek, összesen 111 évesek. Paula és Kriszta összesen 1 évvel idősebbek, mint Géza és Aladár együtt. Géza négyszer olyan idős, mint Aladár, egy évvel ezelőtt pedig Paula négyszer olyan idős volt, mint Aladár. Hány évesek külön-külön a Mézga család tagjai?

Megoldás: Ugyanaz, mint a 7. évfolyam 4. feladata.

2. Határozd meg mindazokat az n kétjegyű természetes számokat, amelyekre a $\sqrt{\frac{n+24}{n-24}}$ szám természetes szám!

Megoldás: Egy szám négyzetgyöke akkor természetes szám, ha a négyzetgyök alatt négyzetszám van. Ekkor

$$k^2 = \frac{n+24}{n-24} = \frac{n-24+24+24}{n-24} = 1 + \frac{48}{n-24}.$$

A szám négyzetgyöke akkor lesz természetes szám, ha $\frac{48}{n-24} > 0$ és $n-24$ a 48 osztója. Így $n-24 \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$, vagyis

$$n \in \{25, 26, 27, 28, 30, 32, 36, 40, 48, 72\}.$$

Ebből adódik, hogy ekkor

$$k^2 \in \{49, 25, 17, 13, 9, 7, 5, 4, 3, 2\},$$

de ezekből az értékekből csak $k^2 \in \{49, 25, 9, 4\}$ lehetséges, így a megoldás $n \in \{25, 26, 30, 40\}$, amelyek mind kétjegyű számok.

3. Az ABC derékszögű háromszögben az S pont az AB átfogó felezőpontja, ahol $|SC| = 20$. Az AC (hosszabb) befogóra berajzoljuk az E pontot úgy, hogy $ES \perp AB$ és $|ES| = 15$. Számítsd ki az ABC háromszög területét!

Megoldás: Mivel az S pont az AB átfogó felezőpontja, így adódik, hogy

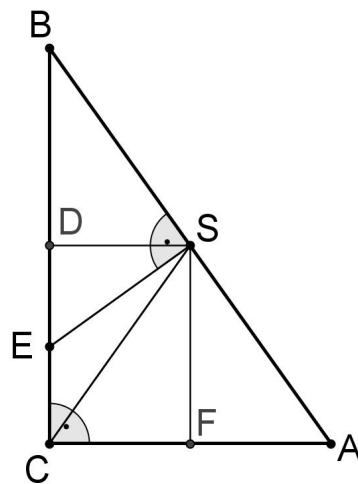
$$|SC| = |SB| = |SA| = 20.$$

Ekkor az ASE derékszögű háromszögből a Pitagorasz tétel alapján adódik, hogy $|AE| = 25$. Legyen D az S pontból az AC befogóra bocsátott merőleges talppontja, F pedig az S pontból az BC befogóra bocsátott merőleges talppontja. Mivel SD az ASE háromszög magasságvonala, ezért $|AE| \cdot |SD| = |SE| \cdot |SA|$, azaz $25 \cdot |SD| = 15 \cdot 20$, amelyből következik, hogy $|SD| = 12$. A $CDSF$ négyszög téglalap, mert minden szöge derékszög, ezért a szemben fekvő oldalai egyenlőek. A BCS háromszög egyenlő szárú, ezért az FS magasságvonal felezi a BC alapot, azaz érvényes, hogy $|BF| = |CF| = |SD| = 12$, vagyis a BC befogó hossza kiszámítható, $|BC| = 24$. Mivel az átfogó felét már ismerjük, így $|AB| = 40$. Újra alkalmazva a Pitagorasz tételt, most az ABC háromszögre, adódik, hogy $|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2$, vagyis $|AC|^2 + 24^2 = 40^2$,

ahonnan adódik, hogy $|AC| = 32$.

A háromszög területe tehát

$$T = \frac{|BC| \cdot |AC|}{2} = \frac{24 \cdot 32}{2} = 384.$$



4. Számold ki az

a) xy kifejezés értékét, majd az

b) $(x+y)^2$ kifejezés értékét, ha tudjuk, hogy

$$\frac{2}{x} - \frac{2}{y} = 1 \text{ és } y - x = 1.$$

Megoldás: a) Az első egyenletet felírhatjuk

$$\frac{2y - 2x}{xy} = 1, \text{ illetve } \frac{2(y - x)}{xy} = 1$$

alakban, amelyből a második egyenlet behelyettesítésével adódik

$$\frac{2}{xy} = 1, \text{ illetve } xy = 2.$$

b) Ha most négyzetre emeljük a második egyenlet mindkét oldalát, akkor $y^2 - 2xy + x^2 = 1$ adódik, ahonnan hozzáadva és kivonva $2xy$ -t felírhatjuk, hogy

$$(x + y)^2 - 4xy = 1.$$

Behelyettesítve $xy = 2$ -t adódik, hogy

$$(x + y)^2 - 4 \cdot 2 = 1, \text{ azaz } (x + y)^2 = 9.$$

9. évfolyam

1. Óránk éppen egy 4 és 5 óra közötti időpontot mutat. Egy 7 és 8 óra közötti pillanatban a két mutató az előbbi helyzethez képest helyet cserélt. Hány óra volt a két időpontban?

Megoldás: A 4 és 5 órai időpontot jelölje X , ennek törtrészét x . Tudjuk, hogy a nagymutató egy óra alatt 360° -os szöggel, a kismutató 30° -os szöggel mozdul el. A kismutató által a 12-es iránnyal bezárt szög legyen α_1 , a nagymutatóé pedig β_1 . Ezt a két szöget a következőképpen számolhatjuk ki:

$$\alpha_1 = 4 \cdot 30^\circ + x \cdot 30^\circ,$$

$$\beta_1 = x \cdot 360^\circ.$$

A második időpontot jelöljük Y -nal, a törtrészét pedig y -nal. Ekkor a második időponthoz tartozó megfelelő szögeket rendre α_2 -vel és β_2 -vel jelölve

$$\alpha_2 = 7 \cdot 30^\circ + y \cdot 30^\circ, \quad \beta_2 = y \cdot 360^\circ.$$

Mivel a két időpontban a mutatók helyet cseréltek ezért $\alpha_1 = \beta_2$ és $\alpha_2 = \beta_1$, azaz

$$4 \cdot 30^\circ + x \cdot 30^\circ = y \cdot 360^\circ \text{ és } 7 \cdot 30^\circ + y \cdot 30^\circ = x \cdot 360^\circ.$$

Ha mindkét egyenletet elosztjuk 30° -kal, akkor az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$4 + x = 12y$$

$$7 + y = 12x$$

Az egyenleteket átrendezve és a második egyenletet 12-vel beszorozva adódik a következő:

$$4 + x - 12y = 0$$

$$84 - 144x + 12y = 0$$

Innen az egyenletek összeadásával adódik, hogy $88 - 143x = 0$, azaz $x = \frac{88}{143} = \frac{8}{13}$.

Ezt az egyenletbe behelyettesítve kapjuk, hogy $y = \frac{5}{13}$, tehát az első időpont $4\frac{8}{13}$

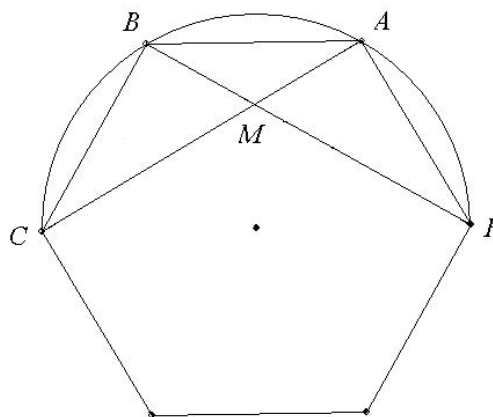
óra, a második $7\frac{5}{13}$ óra.

2. Milyen arányban osztják az $ABCDEF$ szabályos hatszög AC és BF átlói egymást?

Megoldás: Mivel $|AB| = |AF|$, ezért az ABF háromszög egyenlőszárú. Tudjuk, hogy a szabályos hatszög egy belső szöge 120° -os, így az ABF háromszög két alapon fekvő szöge együtt $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$, tehát az ABF szög 30° -os, és a vele egybevágó ACB szög is. Mivel a B csúcsnál lévő belső szög nagysága is 120° , elvégezhetjük a következő számítást:

$$\angle FBC = \angle ABC - \angle ABF = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ.$$

A BCM háromszög egy derékszögű háromszög, amelynek van 30° -os szöge, tehát ez a háromszög egy szabályos háromszög fele. Innen adódik, hogy $|CM| = 2|MB|$, azaz $|CM| = 2|MA|$, tehát az M pont az átlókat 1:2 arányban osztja.



3. Mely pozitív x, y, z egész számokra igaz, hogy

$$x^2y - yz^2 - x^2 + z^2 = 30 \text{ ?}$$

Megoldás: A bal oldal átalakítható kiemelésekkel:

$$y(x^2 - z^2) - (x^2 - z^2) = 30, \text{ illetve } (x^2 - z^2)(y - 1) = 30.$$

Először mutassuk meg, hogy a bal oldal mindkét tényezője pozitív. Ez következik abból, hogy $y - 1$ -ben y legalább 1, de 1 nem lehet, mert akkor a szorzat 0 lenne, tehát $y \geq 2$. Ekkor viszont a másik tényezőnek is pozitívnak kell lennie, így $x > z$.

Az első tényező felbontható $x + z$ és $x - z$ szorzatára, amelyek azonos paritásúak, így szorzatuk vagy páratlan, vagy 4-gyel osztható páros szám. Ez utóbbi eset nem lehetséges, mert a 30-nak nem osztója a 4, tehát az $x^2 - z^2$ csak páratlan lehet. Mivel a 30 páratlan osztói 1, 3, 5 és 15, ezért az $x^2 - z^2$ csak ezeket az értékeket veheti fel. Mivel láttuk, hogy $x > z$, így $x + z > x - z$, és mindkét oldal pozitív.

Ha $x^2 - z^2 = 1$, akkor $x + z = 1$ és $x - z = 1$. Ebből $z = 0$ adódik, ami ellentmondás.

Ha $x^2 - z^2 = 3$, akkor $x + z = 3$ és $x - z = 1$, ahonnan $x = 2$, $z = 1$.

Ha $x^2 - z^2 = 5$, akkor $x + z = 5$ és $x - z = 1$, ahonnan $x = 3$, $z = 2$.

Ha $x^2 - z^2 = 15$, akkor két eset lehetséges: 1) $x + z = 5$ és $x - z = 3$, ahonnan $x = 4$, $z = 1$, 2) $x + z = 15$ és $x - z = 1$, ahonnan $x = 8$, $z = 7$.

Így a következő megoldásokat kaptuk: (2;1;1), (3;7;2), (4;3;1) és (8;3;7).

4. Arthur király n számú lovagja egy kerek asztal körül ül. Minden lovagnál vagy fehérboros, vagy vörösboros kupa van. Pontban éjfélkor minden lovag, akinél vörösbor van, átadja a kupáját a jobb oldali szomszédjának, akinél pedig fehérbor van, átnyújtja a kupáját a bal oldali második szomszédjának. Tudjuk, hogy van vörösbor is és fehérbor is az asztalon. Add meg a fehérboros és vörösboros kupák egy lehetséges elrendezését, hogy éjfél után is mindenkinek legyen kupája, ha a) $n = 12$; b) $n = 13$; c) $n = 2013$.

Ha valamelyik esetben ilyen elrendezése a fehér- és vörösboroknak nem létezik, indokold meg, miért nem.

Megoldás: a) Számozzuk meg sorba a lovagokat. A táblázat első sora jelöli, hogy kinél milyen bor van, a második sorban pedig látható, hogy melyik kupa hova került. A v jelű kupák 1 helyet jobbra lépnek, az f jelűek 2 helyet balra:

éjfél előtt	f1	v2	v3	f4	v5	v6	f7	v8	v9	f10	v11	v12
éjfél után	v12	f4	v2	v3	f7	v5	v6	f10	v8	v9	f1	v11

b) Ebben az esetben nem megoldható a borok elrendezése. Ha egy adott helyen vörösboros kupa áll, akkor jobbra lépve 3 helyet szintén vörösborosnak kellene állnia, mert ha fehér volna ott, akkor a kiindulási helyen ülő jobb szomszédja két kupát kapna, és így valakinek biztosan nem jutna. Ha minden harmadik lovagnak vörösbora van, az egy 13 személyes asztal esetében azt jelenti, hogy mindenkinek vörösbora van (mert mindig jobbra lépve hármat bejárjuk az asztal összes helyét), ami ellentmond a feladat feltételeinek.

c) Az a) részben megadott konstrukciót kell folytatni. Minden harmadik lovagnak fehérbort, a többieknek vörösbort kell adni, és ez lehetséges, mert 2013 osztható 3-mal.

10. évfolyam

1. Hány olyan pozitív egész szám van, amelyre igaz, hogy a számjegyeinek összege és szorzata is egyaránt 24?

Megoldás: A keresett számokban előforduló számjegyek lehetséges értéke 1, 2, 3, 4, 6, 8 a szorzatra vonatkozó feltétel alapján. A számjegyek nem növekvő sorrendben a következők lehetnek azösszegre adott feltétel alapján:

8,3 és 13 db 1-es,
6,4 és 14 db 1-es
6,2,2 és 14 db 1-es
4,3,2 és 15 db 1-es
3,2,2,2 és 15 db 1-es

Az öt lehetséges esetben a megoldások száma rendre: $\frac{15!}{13!}, \frac{16!}{14!}, \frac{17!}{2! \cdot 14!}, \frac{18!}{15!}, \frac{19!}{15! \cdot 3!}$

Összesen tehát $15 \cdot 14 + 16 \cdot 15 + 17 \cdot 8 \cdot 15 + 18 \cdot 17 \cdot 16 + 19 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 3 = 22890$ ilyen szám van.

2. Mely x és y nemnegatív egész számokra igaz, hogy $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1000}$?

Megoldás: Ha $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1000}$, akkor $\sqrt{y} = \sqrt{1000} - \sqrt{x}$, a négyzetre emelés után pedig $y = x + 1000 - 20\sqrt{10x}$ adódik. Ennek alapján a $\sqrt{10x}$ racionális ha a $10x$ négyzetszám, azaz $x = 10k^2$, ahol k természetes szám. Hasonlóan $y = 10n^2$. Az eredeti egyenletbe való behelyettesítés után $k\sqrt{10} + n\sqrt{10} = 10\sqrt{10}$, azaz $k + n = 10$.

A lehetséges (k, n) párok

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

A megfelelő (x, y) párok pedig ennek megfelelően

x	0	10	40	90	160	250	360	490	640	810	1000
y	1000	810	640	490	360	250	160	90	40	10	0

Ezek a számpárok kielégítik az egyenletet.

3. Az O középpontú $|AB| = 2r$ átmérőjű félkörön felvesszük a C és D pontokat úgy, hogy az AD és BC húrok hossza egyaránt a , a CD húr hossza pedig x . Bizonyítsd be, hogy ha a és r mérőszáma racionális szám, akkor x mérőszáma is racionális szám! (Vedd figyelembe a pontok minden lehetséges elrendezését!)

Megoldás: Ha a pontok sorrendje $ABCD$, akkor a feltételek alapján ez egy szimmetrikus trapéz és ennek CT magassága h , amelyet kétféle módon fejezünk ki:

Az OTC és a TBC háromszögben az $h^2 = r^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = a^2 - \left(r - \frac{x}{2}\right)^2$, az

összehasonlítás alapján $r^2 - \frac{x^2}{4} = a^2 - r^2 + rx - \frac{x^2}{4}$, amiből $x = 2r - \frac{a^2}{r}$.

Két racionális szám különbsége, szorzata és hányadosa is racionális szám, tehát ha a és r racionális akkor az x is az.

Ha a pontok sorrendje $ABDC$, akkor a négyszög ismét egyenlőszárú trapéz és ennek szárai

$AC = BD = c = \sqrt{4r^2 - a^2}$, azaz $c^2 = 4r^2 - a^2$ racionális, így $x = 2r - \frac{c^2}{r}$ is az.

Más háromszögpárok segítségével hasonló módon kaphatjuk, hogy $x = \frac{a^2}{r} - 2r$ és analóg módon indokoljuk racionális voltát.

4. Legyenek $A = 177\dots76$ és $B = 355\dots52$ rendre $2k+3$ és $k+2$ számjegyű számok. Bizonyítsd be, hogy $\sqrt{A-B}$ is természetes szám és határozd meg a számjegyeinek számát!

Megoldás. Alakítsuk át az adott számokat a következőképpen:

$$\begin{aligned} A &= 10^{2k+2} + 7 \cdot 10^{2k+1} + 7 \cdot 10^k + \dots + 7 \cdot 10 + 6 = 10^{2k+2} + 70 \cdot (11\dots1) + 6 = \\ &= 10^{2k+2} + \frac{70}{9} \cdot (99\dots9) + 6 = 10^{2k+2} + \frac{70}{9} \cdot (10^{2k+1} - 1) + 6 = \frac{16}{9} \cdot 10^{2k+2} - \frac{16}{9}, \end{aligned}$$

azaz $A = \frac{16}{9}(10^{2k+2} - 1)$.

Hasonló módon kaphatjuk meg a B számot is ilyen alakban.

$$\begin{aligned} B &= 3 \cdot 10^{k+1} + 5 \cdot 10^k + 5 \cdot 10^{k-1} + \dots + 5 \cdot 10 + 2 = 3 \cdot 10^{k+1} + 50 \cdot (11\dots1) + 2 = \\ &= 3 \cdot 10^{k+1} + \frac{50}{9} \cdot (99\dots9) + 2 = 3 \cdot 10^{k+1} + \frac{50}{9} \cdot (10^k - 1) + 2 = \frac{32}{9} \cdot 10^{k+1} - \frac{32}{9}, \end{aligned}$$

azaz $B = \frac{32}{9}(10^{k+1} - 1)$.

Ekkor

$$A - B = \frac{16}{9}(10^{2k+2} - 1) - \frac{32}{9}(10^{k+1} - 1) = \frac{16}{9}10^{2k+2} - \frac{32}{9}10^{k+1} + \frac{16}{9} = \left(\frac{4}{3}(10^{k+1} - 1)\right)^2,$$

és ebből következik, hogy

$$\sqrt{A - B} = \left(\frac{4}{3}(10^{k+1} - 1)\right) = \frac{4}{3}(99\dots9) = 4 \cdot (33\dots3) = 133\dots32,$$

amely $(k+2)$ -jegyű természetes szám.

11. évfolyam

1. Az $f(x) = ax^2 + bx + c$ másodfokú függvénynek ($x \in R, a \neq 0$) egy nullahelye van. Az $f(x)$ függvény minimumhelye $x = c$. Mekkora az ac szorzat értéke? Melyek ezek a függvények?

Megoldás. Mivel az $f(x)$ függvénynek minimuma van ezért $a > 0$.

A minimumhely $x = -\frac{b}{2a} = c$, azaz $b = -2ac$. Mivel a függvénynek egy nullahelye van, ezért a diszkrimináns értéke 0, azaz $b^2 - 4ac = 0$, ahova $b = -2ac$ helyettesítéssel $4a^2c^2 - 4ac = 0$ adódik, vagyis $4ac(ac - 1) = 0$, ahonnan leolvasható, hogy ac értéke vagy 0 vagy 1.

Ha az $ac = 0$, akkor $f(x) = ax^2$, ha viszont $ac = 1$, akkor $f(x) = ax^2 - 2x + \frac{1}{a}$, ahol az $a > 0$.

2. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$\begin{array}{rclcl} x^3 & + & y^3 & + & z^3 & = & 8 \\ x^2 & + & y^2 & + & z^2 & = & 22 \\ \frac{1}{x} & + & \frac{1}{y} & + & \frac{1}{z} & = & \frac{-z}{xy} \end{array}$$

Megoldás: Az utolsó egyenletből következik, hogy:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{z}{xy} = 0$$

$$\frac{yz + xz + xy + z^2}{xyz} = 0 \Leftrightarrow x(z + y) + z(y + z) = 0 \Leftrightarrow (y + z)(x + z) = 0$$

innen

$$y + z = 0 \quad \vee \quad x + z = 0$$

$$y = -z \quad \quad \quad x = -z$$

ekkor az első egyenletből

$$x^3 - z^3 + z^3 = 8 \quad \vee \quad -z^3 + y^3 + z^3 = 8$$

$$x = 2 \quad \quad \quad y = 2$$

és a második egyenletből

$$4 + z^2 + z^2 = 22 \quad \vee \quad z^2 + 4 + z^2 = 22$$

$$z = \pm 3 \quad \quad \quad z = \pm 3$$

$$y = \mp 3 \quad \quad \quad y = \mp 3$$

Így az egyenletrendszer megoldáshalmaza

$$M = \{(2, 3, -3), (2, -3, 3), (-3, 2, 3), (3, 2, -3)\}.$$

3. A szabályos háromoldalú $ABCS$ gúla alaplapja ABC , amelynek élei a cm hosszúságúak, csúcsa pedig S . Számítsd ki az adott gúla térfogatát, ha az A csúcs távolsága a szemköztes oldallaptól h cm.

Megoldás: Az AMN derékszögű háromszögből

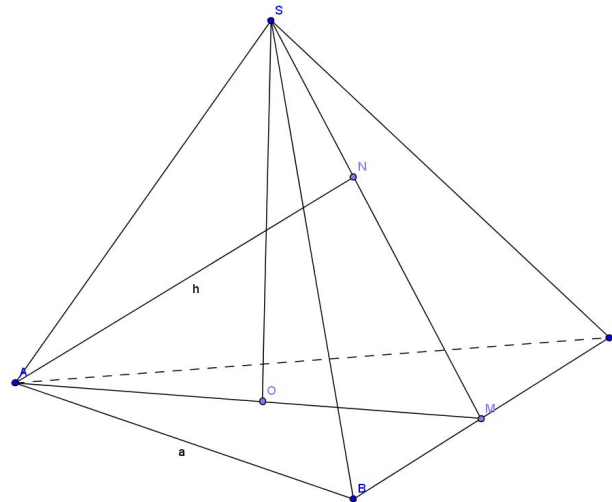
$$|MN| = \sqrt{|AM|^2 - |AN|^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - h^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - h^2}$$

Mivel az $AMN\Delta$ és az $SMO\Delta$ hasonló háromszögek, ezért

$$|AN| : |NM| = |SO| : |OM|, \text{ vagyis}$$

$$SO = H_{ABCS} = \frac{OM \cdot AN}{NM} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot h}{\sqrt{\frac{3a^2}{4} - h^2}} = \frac{ah\sqrt{3}}{3\sqrt{3a^2 - 4h^2}}.$$

$$\text{A térfogat tehát: } V = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H_{ABCS}}{3} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{ah\sqrt{3}}{3\sqrt{3a^2 - 4h^2}}}{3} = \frac{a^3h}{12\sqrt{3a^2 - 4h^2}}.$$



4. Igazold, hogy $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$.

Megoldás: Végezzük el az alábbi átalakításokat:

$$\begin{aligned} \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} &= \\ &= \frac{1}{2\sin \frac{\pi}{7}} \left(2\sin \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{2\pi}{7} + 2\sin \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7} + 2\sin \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{6\pi}{7} \right) = \\ &= \frac{1}{2\sin \frac{\pi}{7}} \left(\sin \frac{3\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} + \sin \frac{5\pi}{7} - \sin \frac{3\pi}{7} + \sin \frac{7\pi}{7} - \sin \frac{5\pi}{7} \right) = \\ &= \frac{1}{2\sin \frac{\pi}{7}} \left(-\sin \frac{\pi}{7} \right) = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

12. évfolyam

1. Ha x valós szám és $x^3 + \frac{1}{x^3} = 18$, akkor számítsd ki $x^5 + \frac{1}{x^5}$ értékét!

Megoldás: Legyen $x + \frac{1}{x} = t$. Ekkor $x^3 + \frac{1}{x^3} = t^3 - 3t$ (ismert összefüggés pl. a szimmetrikus egyenletek esetében). Így $t^3 - 3t = 18$, vagyis $t^3 - 3t - 18 = 0$. Ennek az egyenletnek egy valós megoldása van, s ez a $t = 3$ (pl. Horner-elrendezéssel kiszámítható). Így $x + \frac{1}{x} = 3$. Ekkor a binomiális képlet alapján:

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{1}{x}\right)^5 &= x^5 + 5x^4 \frac{1}{x} + 10x^3 \frac{1}{x^2} + 10x^2 \frac{1}{x^3} + 5x \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} \\ 3^5 &= x^5 + \frac{1}{x^5} + 5\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + 10\left(x + \frac{1}{x}\right) \\ 243 &= x^5 + \frac{1}{x^5} + 5 \cdot 18 + 10 \cdot 3 \\ x^5 + \frac{1}{x^5} &= 123. \end{aligned}$$

2. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenletrendszert!

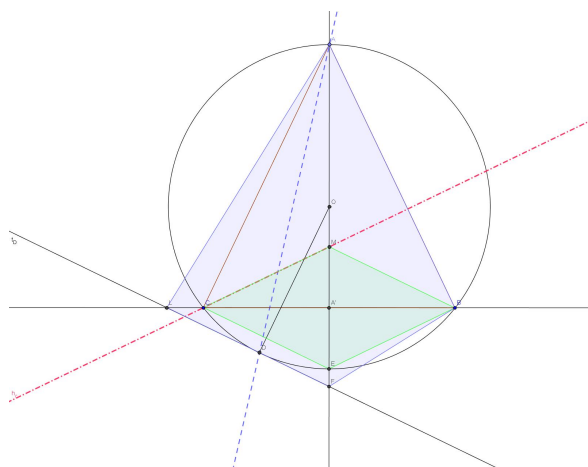
$$\begin{array}{rclcl} x^3 & + & y^3 & + & z^3 & = & 8 \\ x^2 & + & y^2 & + & z^2 & = & 22 \\ \frac{1}{x} & + & \frac{1}{y} & + & \frac{1}{z} & = & \frac{-z}{xy} \end{array}$$

Megoldás: Ugyanaz, mint 11. évfolyam 2. feladata.

3. Az ABC egyenlő szárú háromszögben ($|AB| = |AC|$) az AA' magasságvonal a háromszög köré írt kört E pontban, míg az EAC szögfelezője a kört D pontban metszi. A körhöz D pontban húzott érintő az AE, AC, BC egyeneseket, rendre, az F, I, L pontokban metszi.

a) Bizonyítsd be, hogy ha M a háromszög magasságpontja, akkor a $BMCE$ négyszög rombusz!

b) Igazold, hogy $ABFL$ húrnégyszög!



Megoldás: a) $\angle ACE$ derékszög, mert a kör átmérőjére szerkesztett kerületi szög. $|DC| \cong |ED|$, mert AD szögfelező. $|BE| \cong |EC|$, mert AE szögfelező. FL párhuzamos EC egyenessel, mert $DO \parallel AC$ ($ADO\Delta$ egyenlő szárú, alapon fekvő szögei egybevágóak, $\angle ADO \cong \angle OAD \cong \angle DAC$). Mivel $BM \perp AC$ és $EC \perp AC$, így $BM \parallel AC$.

Mivel $|MC| \cong |BM|$ (egyenlő szárú háromszögben), így $BECM$ rombusz.

b) Mivel $CA \perp DL$ és $AE \perp BL$, ezért $\angle FLB \cong \angle CAE \cong \angle FAB$, s így $ABFL$ húrnégyszög.

4. Adott az $f(x) = x^3 + px + q$ függvény, ahol p és q valós paraméterek.

a) Ha M a függvény helyi maximuma és m a függvény helyi minimuma, akkor fejezd ki a paraméterek segítségével az Mm kifejezést!

b) Ha -2 a függvény nullahelye, határozd meg p és q értékeit úgy, hogy $M - m = 4$ teljesüljön!

Megoldás:

a) Mivel $f'(x) = 3x^2 + p$, ezért

$f'(x) = 0$, azaz $3x^2 + p = 0$, ebből $x_{1/2} = \pm \sqrt{\frac{-p}{3}}$ a stacionárius pontok, ha $p < 0$.

$$f''(x) = 6x$$

$$f''\left(\sqrt{\frac{-p}{3}}\right) = 6\sqrt{\frac{-p}{3}} > 0, \text{ ahonnan } m = f_{\min}\left(\sqrt{\frac{-p}{3}}\right) = \frac{-p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}} + p\sqrt{\frac{-p}{3}} + q$$

$$f''\left(-\sqrt{\frac{-p}{3}}\right) = -6\sqrt{\frac{-p}{3}} < 0, \text{ ahonnan } M = f_{\max}\left(-\sqrt{\frac{-p}{3}}\right) = \frac{p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}} - p\sqrt{\frac{-p}{3}} + q$$

Ekkor

$$Mm = \left(q + \frac{2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)\left(q - \frac{2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}\right) = q^2 - \frac{4p^2}{9}\left(\frac{-p}{3}\right)$$

$$\text{vagyis } Mm = q^2 + \frac{4p^3}{27}.$$

$$\text{b) } f(-2) = 0 \Rightarrow (-2)^3 - 2p + q = 0 \Rightarrow q = 2p + 8$$

$$M - m = q + \frac{2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}} - q + \frac{2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}} = \frac{4p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}} = 4 \Rightarrow \sqrt{\frac{-p}{3}} = \frac{3}{p},$$

innen $27 = -p^3$, illetve $p = \sqrt[3]{-27}$.

Mivel $p \in \mathbb{R}$, így $p = -3$ és $q = 2$.

A X. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY DÍJAZOTTJAI

7. évfolyam

1. Makán Albert, Szervo Mihály Általános Iskola, Muzslya, **I. díj**
2. Kovács Imola, Sonja Marinković Általános Iskola, Nagybecskerek, **II. díj**
3. Csizmadija Klaudia, Majsai úti Általános Iskola, Szabadka, **II. díj**
4. Lázár Júlia, Sonja Marinković Általános Iskola, Nagybecskerek, **III. díj**
5. Szvorenny Viktor, Novak Radonjić Általános Iskola, Mohol, **III. díj**
6. Bujdosó Tamás, Petar Kočić Általános Iskola, Temerin, **dicséret**
7. Bálint Valentin, Petar Kočić Általános Iskola, Temerin, **dicséret**

8. évfolyam

1. Szögi Evelin, Kis Ferenc Általános Iskola, Orom, **I. díj**
2. Fenyvesi Abigél, Stevan Sremac Általános Iskola – November 11, Zenta, **I. díj**
3. Szalaji Natális, Miroslav Antić Általános Iskola, Palics, **II. díj**
4. Korhecz Réka, Miroslav Antić Általános Iskola, Palics, **II. díj**
5. Fa Dávid, Majsai úti Általános Iskola, Szabadka, **II. díj**
6. Toldi Teodóra, Csokonai Vitéz Mihály Általános Iskola, Felsőhegy, **III. díj**
7. Molnár Aurél, Október 10. Általános Iskola, Horgos, **III. díj**
8. Tót Szamanta, Kókai Imre Általános Iskola, Temerin, **dicséret**
9. Vrbaski Viktor, Jovan Mikić Általános Iskola, Szabadka, **dicséret**
10. Erdélyi Valentina, Miroslav Antić Általános Iskola, Palics, **dicséret**
11. Csipak Noémi, Jovan Popović Általános Iskola, Csóka, **dicséret**
12. Sörös Vince, Miroslav Antić Általános Iskola, Palics, **dicséret**

9. évfolyam

1. Körösi Ágota, Műszaki Középiskola, Ada, **I. díj**
2. Apró Alexandra, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
3. Dobó Márk, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
4. Kálmán Szilárd, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
5. Borsos Teodóra, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
6. Terhes Balázs, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
7. Horti Katalin, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
8. Szkocsovski Zsolt, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **III. díj**
9. Mucsi Edina, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **dicséret**
10. Dodony Róbert, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **dicséret**
11. Kozák Sánta Vivien Dóra, Szárits János Műszaki Középiskola, Szabadka, **dicséret**
12. Juhász Bence, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **dicséret**
13. Zelenka Flóra, Becsei Gimnázium, Óbecse, **dicséret**
14. Francia Edina, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **dicséret**
15. Deák Irén, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **dicséret**
16. Gavódi Vanda, Műszaki Középiskola, Ada, **dicséret**
17. Szabó Dávid, Dositej Obradović Gimnázium, Topolya, **dicséret**
18. Berec Judit, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **dicséret**
19. Szabó Emília, Szárits János Műszaki Középiskola, Szabadka, **dicséret**
20. Varga Somogyi Árpád, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **dicséret**

10. évfolyam

1. Szilágyi Krisztina, Jovan Jovanović Gimnázium, Újvidék, **I. díj**
2. Kovacsics Flórián, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **I. díj**
3. Vrábel Máté Dávid, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **II. díj**
4. Kanalas Dávid, Matematikai Gimnázium, Belgrád, **II. díj**
5. Kovacsics Viola, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **III. díj**
6. Téglás Ervin, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
7. Csipak Levente, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
8. Türi Erik, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
9. Pletikoszity Árpád, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **dicséret**
10. Kiss Tamás, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **dicséret**
11. Patarica Ildikó, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **dicséret**
12. Zita Renáta, Szárits János Műszaki Középiskola, Szabadka, **dicséret**

11. évfolyam

1. Szilágyi Dániel, Jovan Jovanović Gimnázium, Újvidék, **I. díj**
2. Horti Krisztina, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
3. Bíró Dominik, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
4. Tokity Rudolf, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
5. Mátéffy Kristóf, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
6. Major Kristóf, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **dicséret**

12. évfolyam

1. Balzam Henrietta, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
2. Skultéti Anikó, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
3. Pletikoszity Johanna, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **dicséret**
4. Bakos Evelin, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **dicséret**
5. Gyorgyevics Elvira, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**
6. Ördög Emese, Becsei Gimnázium, Óbecse, **dicséret**

FELADAT TÍPUSOK

Számok számjegyei: I/9/1, III/9/4, III/12/1, IV/9/2, IV/10/2, V/9/2, VI/9/3, VI/11/2, VII/8/2, VII/8/3, VII/10/2, VIII/9/2, X/7/3, X/10/4

Halmazok: I/9/2, VI/9/1, VII/9/1

Számelmélet: I/9/3, I/12/5, II/9/1, II/9/2, II/10/1, II/12/1, II/12/2, III/9/4, III/10/2, III/10/3, III/10/5, III/11/4, III/12/1, V/9/2, V/9/3, V/10/3, V/11/3, VI/9/2, VI/9/3, VI/11/2, VII/8/3, VIII/8/3, VIII/10/1, VIII/11/1, IX/8/3, IX/10/2, X/8/2, X/9/3, X/10/1

Geometria – háromszög: I/9/4, I/9/5, I/10/4, I/11/3, I/11/4, II/9/5, II/10/1, II/11/4, II/12/5, III/9/1, III/9/3, III/10/4, III/11/2, III/12/5, IV/9/3, V/12/4, VII/8/4, VII/9/4, VIII/8/4, VIII/9/3, VIII/10/3, IX/12/1, X/7/2, X/8/3, X/12/3

Skatulya-elv: I/10/1, III/9/2,

Szélsőérték: I/10/2, II/10/3, II/12/1, IV/12/2, VII/12/4, IX/12/4,

Geometria – húrnégyszög, érintőnégyyszög: I/10/3, I/12/3, II/10/3, VII/11/3, VIII/12/3, IX/10/3,

Egyenlőtlenség, egyenlőtlenség-rendszer: I/10/5, II/9/3, II/10/2, II/11/2, II/11/3, III/9/1, III/10/1, III/11/1, IV/10/3, V/12/2, VII/10/4, VIII/10/1

Egyenlet, egyenletrendszer: I/11/2, I/12/1, II/9/1, II/10/1, II/10/4, II/11/1, II/12/1, IV/9/1, IV/10/1, IV/11/2, IV/11/3, IV/12/3, V/10/2, V/11/2, VI/10/2, VI/11/2, VI/11/3, VI/12/3, VII/11/4, VII/12/2, VIII/8/3, VIII/12/1, IX/7/4, IX/11/2, IX/12/1, X/7/4, X/8/2, X/9/3, X/10/2, X/11/2, X/12/1

Függvények: I/11/1, II/12/1, V/9/3, V/12/3, X/11/1, X/12/4

Trigonometria: I/11/4, II/10/5, II/11/5, IV/11/3, IV/12/3, VI/12/3, VII/11/3, VII/12/1, VIII/11/1, IX/11/2, IX/12/1, X/11/4

Számtani és mértani sorozatok: I/12/2, II/10/5, II/12/5, III/12/3, IV/12/4, VIII/12/4, IX/12/3

Logikai feladat, gráfok: III/9/2, III/11/3, III/12/2, IV/9/1, IV/10/1, V/9/1, V/11/1, V/12/1, VI/9/1, VI/11/1, VI/12/1, VII/8/1, VII/9/1, VII/10/1, VII/11/1, VII/12/1, VIII/8/1, VIII/8/2, VIII/9/1, VIII/10/1, IX/7/2, IX/8/1, IX/8/2, IX/9/3, IX/9/4, X/7/1, X/7/4, X/9/1, X/9/4,

Geometria – kocka, tetraéder, gúla: I/11/5, I/12/4, II/11/5, III/11/1, IV/11/4, VI/11/4, IX/12/4, X/11/3

Geometria – sokszög: III/11/5, X/9/2

Sorozatok: III/12/4, IX/7/2

Területszámítás, területlefedés: III/12/4, IX/8/4

Algebrai átalakítás: II/10/4, IV/9/4, IV/11/1, V/10/2, VII/12/4, VIII/12/4, IX/10/4, X/12/1

Geometria – körök, érintők: IV/10/4, V/10/4, VII/10/3, IX/10/3, X/10/3

Analitikus geometria: IV/12/1, VII/12/3,

Geometria – gömb: IV/12/2

Geometria – téglalap, paralelogramma: V/9/4, VI/9/4, VI/9/4, IX/9/2

Térfogatszámítás: V/11/4, VI/12/4, IX/11/4, X/11/3

Összeszámlálási problémák: II/9/4, II/12/4, VI/9/3, VII/9/3, IX/7/1, IX/7/3

Számtani és mértani közép: VIII/11/4, IX/8/2,

Komplex számok: IX/10/4

FEKETE MIHÁLY (1886-1957)

Fekete Mihály 1886. július 19-én született Zentán. Eredeti családi neve *Schwarz* volt. Elemi és középiskolai tanulmányainak befejezése után a budapesti és a göttingi egyetemeken tanult matematikát. Az egyetem elvégzése után mint tehetséges matematikus *Beke Manó* professzor tanszékére került. Pár évi tanársegédi működés után a Tanácsköztársaság alatti magatartása miatt állásától megfosztották, sőt még a Matematikai és Fizikai Társulat is törölte tagjai sorából. Ezután középiskolai tanárként működött. Először a budapesti Nagymező utcai polgári iskolában kapott állást. Ebben az iskolában 1919-ig, majd igen rövid ideig a Váci utcai és a Práter utcai leánygimnáziumban tanított, ám innen is elbocsátották. 1925-től a budapesti izraelita hitközség fiúgimnáziumának tanára lett, egészen 1928-ig, amikor két egyetemtől is kapott professzori meghívást. Ő a Jeruzsálemi Egyetem matematika tanszékének meghívását fogadta el, amelynek később dékánja is volt. A meghívást *Hadamard* és *Landau* is szorgalmazta, mert jól ismerték és nagyra értékelték *Fekete Mihály* munkásságát. *Fekete Mihály* a Jeruzsálemi Egyetem tanára volt elhunytáig.

„Fekete Mihályt sajnós személyesen nem ismerhettem. Volt tanítványai, ismerősei, barátai, elsősorban *Bálint Elemér* elbeszélései alapján azonban olyan kép rajzolódott elém, amely azt mutatta, hogy *Fekete Mihály* nemcsak kiváló és tehetséges matematikus volt, hanem igen jó pedagógus, nagyszerű előadó is. Egyénisége pedig, emberi jó tulajdonságai miatt, mindenki számára, aki ismerte, rendkívül megnyerő volt. *Fekete Mihály* egyike volt *Fejér Lipót* azon tanítványainak, akik matematikai munkásságukkal nagy elismerést szereztek maguknak. Több dolgozatából kiténik, hogy tanárától, *Fejér Lipóttól* kapott indítékot egy-egy probléma vizsgálatához. *Fekete Mihály* legjelentősebb és egyben legismertebb eredményei a ponthalmazok elmélete, az algebra és a komplex függvénytan határterületéhez tartoznak. Igen értékes és szép eredményeket ért el azonban a Fourier-sorok elméletében, a divergens sorok szummációjában, az interpoláció-elméletben és a matematikusi pályája kezdetén a számelméletben is” – írta róla *Balázs János* a *Matematikai Lapokban*, 1958-ban.

Rácz László matematikatanár javaslatára, *Fekete Mihály* volt Budapesten a gimnazista *Neumann János* egyik magántanára. Még az érettségi előtt a zseniális ifjú *Neumann* (18 éves korában) tehetséges tanárával, *Fekete Mihállyal*, közösen írt és jelentetett meg tudományos dolgozatot. A *Neumann Jánossal* közösen írt dolgozata *Fekete Mihály* irodalmi működésének 11. évében jelent meg, s ez a 19. publikált tanulmánya. A megjelenés idején, 1922-ben, *Neumann János* már Berlinben egyetemi hallgató volt. Az 1922. évi nyomdába küldést megerősíti az a tény is, hogy a tanulmány bevezetőjében *Fejér Lipót* 1922. évi egyik cikkére is hivatkoznak. *Fejér Lipót* egy problémáját az ún. *Fekete-féle* pontok segítségével oldotta meg. Egyébként *Fekete Mihály* magányos alkotó volt, csak néhány esetben közölt közös cikket *Szegő Gáborral*, *C. E. Win-nel* és *J. L. Walsh-sal*. *Neumann-nal* nem publikált több közös művet. Azonban *Neumann* két esetben is általánosította *Fekete* tételeit.

Fekete Mihály 1957. május 13-án hunyt el Jeruzsálemben.

Irodalom

1. Természet Világa, Neumann-émlékszáma, 134. évf. 2003. III. különszám
2. Filep László: *A Bolyaiaktól Erdős Pálig*, Nyári Akadémia, Szabadka, 2003. augusztus 4.
3. Sain Márton, *Matematikatörténeti ABC*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1978.
4. Balázs János, *Fekete Mihály munkásságáról*, *Matematikai Lapok*, 1958. 3-4. sz.

A NEMZETKÖZI MAGYAR MATEMATIKAVERSENYEK TÖRTÉNETE

„A magyar irodalom ötágú síp, összehangolhatatlan. Eléri még vajon a mi nemzedékünk, hogy egy jó munka mind e nemcsak külön-külön, de másként szóló sípot egyszer ismét összehangolja, illetve az eldugulástól megmenti?” (Illyés Gyula)

Az 1991. évi jubileumi szegedi Rátz László Vándorgyűlésen vetődött fel először – *Bencze Mihály* brassói és *Oláh György* komáromi matematikatanárok részéről – olyan középiskolai matematikaverseny szervezésének gondolata, amely lehetőséget ad arra, hogy a Kárpát-medence magyar anyanyelvű diákjai összemérhessék tudásukat. Elképzelésüket talán *Dsida Jenő* Psalmus Hungaricus című versének soraival lehetne leginkább jellemezni, amelyek refrénként térnek vissza a versenyeken:

„Elindulok, mint egykor Csoma Sándor,
hogy felkutassak minden egy magyart.
Székelyek, ott a bércek szikla-mellén,
üljeteK mellém!
Magyarok ott a Tisza partján,
magyarok ott a Duna partján,
magyarok ott a tót hegyek közt
s a bácskai szőlőhegyek közt,
üljeteK mellém!”

Az elhatározást tett követte. Az ötágú-sokágú síp Illyés-i szellemében, a nagyon hiányzó jó munka elvégzésének reményében került megrendezésre 1992-től a Nemzetközi Magyar Matematikaverseny, évente 200-300 Kárpát-medence-i magyarok diák és tanár részvételével. Létrejöttét és hagyománnyá válását a régióvezetők áldozatos munkája tette lehetővé: a Délvidéken *Szabó Magdái*, Erdélyben *Bencze Mihályé*, a Felvidéken *Oláh Györgyé* és *Keszégh Istváné*, Kárpátalján *Elek Ernőé*, *Neubauer Ferencé* és *Balázs Borbálái*, Magyarországon *Urbán Jánosé* és *Pintér Ferencé*. A versenyek eddigi helyszínei: Komárom (1992), Vác (1993), Ungvár (1994), Paks (1995), Székelyudvarhely (1996), Kaposvár (1997), Szabadka (1998), Debrecen (1999), Dunaszerdahely (2000), Nagykanizsa (2001), Sepsiszentgyörgy (2002), Eger (2003), Nagydobrony (2004), Miskolc (2005), Zenta (2006), Szeged (2007), Kassa (2008), Gyula (2009), Szatmárnémeti (2010), Bonyhád (2011), Kecskemét (2012), Győr (2013).

E rangos nemzetközi megmérettetést három fontos tényező mozgatja és köti össze: az anyanyelv, a matematika szeretete és tisztelete, valamint a találkozók születő vagy megerősödő barátság. A Nemzetközi Magyar Matematikai Verseny lehetőséget ad az egységes magyar matematikai nyelv megteremtésére, a szabadidős programjának szerves részét képező kirándulás pedig alkalmat ad a különböző országok magyar lakta tájainak, kultúrájának, történelmének és szokásainak megismerésére.

Az első rendezvényen, melynek színhelye Észak- és Dél-Komárom volt, *Reimann Istvánnak*, a zsűri elnökének zárószavai a következők voltak: „A két helyszín közötti Duna-hídon naponta többször is átkelve éreztük igazán, hogy ez a híd úgy kapcsolhat össze embereket és országokat, ahogyan azt a jövő Európájában elképzeljük.”

Az immár húsz éve megrendezésre kerülő verseny valóban országokat és embereket köt össze, s erősen hisszük, hogy „Csak művelt nemzet tarthatja fenn magát Európa népei között, tehát a nemzet jövője kulturális előre haladásától függ.” (Eötvös József)